数理計画論

第7回目

- 双対問題

双対問題（導入）

- 線形計画問題の最大化問題を考えてみる

目的関数　$z = 4x_1 + 3x_2$　➡　最大化

制約条件　$x_1 + 2x_2 \leq 2$　①

$12x_1 + 18x_2 \leq 19$　②　（問題１）

$6x_1 + 4x_2 \leq 7$　③

$x_1, x_2 \geq 0$

双対問題（導入）

（正準形）

$$z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow Max$$

$$z = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow Max$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$12x_1 + 18x_2 \leq 19$$
$$6x_1 + 4x_2 \leq 7$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 12 & 18 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

双対問題（導入）

- **線形計画問題の最大化問題を考えてみる**

目的関数 $z = 4x_1 + 3x_2$ ➡ **最大化**

制約条件 $x_1 + 2x_2 \le 2$ ①

$12x_1 + 18x_2 \le 19$ ② **（問題１）**

$6x_1 + 4x_2 \le 7$ ③

$x_1, x_2 \ge 0$

（正準形）

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to Max$$

$x_1 + x_2 \le 2$	$\times \lambda_1$	$\lambda_1 x_1 + \lambda_1 x_2 \le 2\lambda_1$
$12x_1 + 18x_2 \le 19$	$\times \lambda_2$	$12\lambda_2 x_1 + 18\lambda_2 x_2 \le 19\lambda_2$
$6x_1 + 4x_2 \le 7$	$\times \lambda_3$	$6\lambda_3 x_1 + 4\lambda_3 x_2 \le 7\lambda_3$

$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0$$

双対問題（導入）

- 線形計画問題の最大化問題を考えてみる

目的関数　$z = 4x_1 + 3x_2$　➡　最大化

制約条件　$x_1 + 2x_2 \leq 2$　①

$12x_1 + 18x_2 \leq 19$　②　（問題１）

$6x_1 + 4x_2 \leq 7$　③

$x_1, x_2 \geq 0$

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & \lambda_1 x_1 & + & \lambda_1 x_2 & \leq 2\lambda_1 \\
 & 12\lambda_2 x_1 & + & 18\lambda_2 x_2 & \leq 19\lambda_2 \\
+) & 6\lambda_3 x_1 & + & 4\lambda_3 x_2 & \leq 7\lambda_3 \\
\hline
\end{array}
$$

$$(\lambda_1 + 12\lambda_2 + 6\lambda_3)x_1 + (\lambda_1 + 18\lambda_2 + 4\lambda_3)x_2 \leq 2\lambda_1 + 19\lambda_2 + 7\lambda_3$$

左辺が目的関数　$4x_1 + 3x_2$　より大きくなるためには、

$$
\begin{array}{rrl}
 & 4 \leq \lambda_1 + 12\lambda_2 + 6\lambda_3 & \times x_1 \\
+) & 3 \leq \lambda_1 + 18\lambda_2 + 4\lambda_3 & \times x_2 \\
\hline
\end{array}
$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq (\lambda_1 + 12\lambda_2 + 6\lambda_3)x_1 + (\lambda_1 + 18\lambda_2 + 4\lambda_3)x_2$$

双対問題（導入）

- **線形計画問題の最大化問題を考えてみる**

目的関数　$z = 4x_1 + 3x_2$　➡　**最大化**

制約条件　$x_1 + 2x_2 \leq 2$　①

$12x_1 + 18x_2 \leq 19$　②　（問題１）

$6x_1 + 4x_2 \leq 7$　③

$x_1, x_2 \geq 0$

新変数$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$の最適化問題を考えてみる

目的関数　$w = 2\lambda_1 + 19\lambda_2 + 7\lambda_3$　➡**最小化**

制約条件　$\lambda_1 + 12\lambda_2 + 6\lambda_3 \geq 4$

$2\lambda_1 + 18\lambda_2 + 4\lambda_3 \geq 3$　（問題２）

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$

これらを満たす λ_1, λ_2, λ_3 に対しては、

$$\underbrace{4x_1 + 3x_2}_{\text{(問題１)の目的関数}} \leq (\lambda_1 + 12\lambda_2 + 6\lambda_3)x_1 + (\lambda_1 + 18\lambda_2 + 4\lambda_3)x_2$$

$$\leq \underbrace{2\lambda_1 + 19\lambda_2 + 7\lambda_3}_{\text{(問題2)の目的関数}}$$

最も良い（小さい）上界を与える　$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$　を求めるには、

$$w = 2\lambda_1 + 19\lambda_2 + 7\lambda_3 \rightarrow Min$$

ただし、

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 12\lambda_2 + 6\lambda_3 & \geq & 4 \\ \lambda_1 + 18\lambda_2 + 4\lambda_3 & \geq & 3 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 & \geq & 0 \end{array}}$$

双対問題（導入）

線形計画問題の最大化問題を考えてみる

目的関数　$z = 4x_1 + 3x_2$　➡　最大化

制約条件　$x_1 + 2x_2 \leq 4$ 2　①

$12x_1 + 18x_2 \leq 19$　②　（問題１）

$6x_1 + 4x_2 \leq 7$　③

$x_1, x_2 \geq 0$

シンプレックス法で、最適解は:

$$x_1 = \frac{5}{6}, \qquad x_2 = \frac{1}{2}$$

目的関数値 $z = \dfrac{29}{6}$

新変数$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$の最適化問題を考えてみる

目的関数　$w = 2\lambda_1 + 19\lambda_2 + 7\lambda_3$ ➡最小化

制約条件　$\lambda_1 + 12\lambda_2 + 6\lambda_3 \geq 4$

$2\lambda_1 + 18\lambda_2 + 4\lambda_3 \geq 3$　（問題２）

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$

２段階法で、最適解は:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{1}{30}, \quad \lambda_3 = \frac{3}{5}$$

目的関数値 $w = \dfrac{29}{6}$

$$z = w = \frac{29}{6}$$

双対問題（導入）

線形計画問題の最大化問題を考えてみる

目的関数　$z = 4x_1 + 3x_2$　➡　最大化

制約条件　$x_1 + 2x_2 \leq 4$　①

$12x_1 + 18x_2 \leq 19$　②　（問題１）

$6x_1 + 4x_2 \leq 7$　③

$x_1, x_2 \geq 0$

シンプレックス法で、最適解は:

$$x_1 = \frac{5}{6}, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

目的関数値 $z = \frac{29}{6}$

新変数$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$の最適化問題を考えてみる

目的関数　$w = 2\lambda_1 + 19\lambda_2 + 7\lambda_3$ ➡最小化

制約条件　$\lambda_1 + 12\lambda_2 + 6\lambda_3 \geq 4$

$2\lambda_1 + 18\lambda_2 + 4\lambda_3 \geq 3$　（問題２）

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$

２段階法で、最適解は:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{1}{30}, \quad \lambda_3 = \frac{3}{5}$$

目的関数値 $w = \frac{29}{6}$

$$z = w = \frac{29}{6}$$

$$\lambda_1 (x_1 + 2x_2 - 2) = 0$$
$$\lambda_2 (12x_1 + 18x_2 - 19) = 0$$
$$\lambda_3 (6x_1 + 4x_2 - 7) = 0$$
$$x_1(\lambda_1 + 12\lambda_2 + 6\lambda_3 - 4) = 0$$
$$x_2(2\lambda_1 + 18\lambda_2 + 4\lambda_3 - 3) = 0$$

成立する

双対問題（導入）

線形計画問題の最大化問題を考えてみる
目的関数　$z = 4x_1 + 3x_2$　➡　**最大化**
制約条件　$x_1 + 2x_2 \leq 4$　①
$12x_1 + 18x_2 \leq 19$　②　（問題１）
$6x_1 + 4x_2 \leq 7$　③
$x_1, x_2 \geq 0$

シンプレックス法で、最適解は:

$$x_1 = \frac{5}{6}, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

目的関数値 $z = \frac{29}{6}$

$$z = w = \frac{29}{6}$$

新変数$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$の最適化問題を考えてみる
目的関数　$w = 2\lambda_1 + 19\lambda_2 + 7\lambda_3$　➡**最小化**
制約条件　$\lambda_1 + 12\lambda_2 + 6\lambda_3 \geq 4$
$2\lambda_1 + 18\lambda_2 + 4\lambda_3 \geq 3$　（問題２）
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$

２段階法で、最適解は:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{1}{30}, \quad \lambda_3 = \frac{3}{5}$$

目的関数値 $w = \frac{29}{6}$

主問題　　**双対問題**

双対問題　　**主問題**

（問題１）と（問題２）はペアになっている

双対問題

主問題	双対問題
$z = 4x_1 + 3x_2 \to Max$	$w = 2\lambda_1 + 19\lambda_2 + 7\lambda_3 \to Min$
$x_1 + x_2 \le 2$ $12x_1 + 18x_2 \le 19$ $6x_1 + 4x_2 \le 7$	$\lambda_1 + 12\lambda_2 + 6\lambda_3 \ge 4$ $\lambda_1 + 18\lambda_2 + 4\lambda_3 \ge 3$
$x_1 , x_2 \ge 0$	$\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3 \ge 0$

双対問題

主問題

$$z = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to Max$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 12 & 18 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

双対問題

$$w = \begin{pmatrix} 2 & 19 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \to Min$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 1 & 18 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3 \geq 0$$

双対問題　（正準形）

主問題

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \to \underline{Max}$$

$$A \mathbf{x} \le \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \ge 0$$

双対問題

$$w = \mathbf{b}^T \boldsymbol{\lambda} \to \underline{Min}$$

$$A^T \boldsymbol{\lambda} \ge \mathbf{c}$$

$$\boldsymbol{\lambda} \ge 0$$

主問題と双対問題の対応

	主問題	双対問題
費用ベクトル	c^T	b^T
変数ベクトル	x	λ
右辺ベクトル	b	c
係数行列	A	A^T

双対問題

- **線形計画問題（LP）の最適化問題の特徴**
  - **n個の変数$x_{1,}x_2,\cdots,x_n$はすべて非負**
  - **m個の制約条件及び目的関数zは変数$x_{1,}x_2,\cdots,x_n$の一次式になる**

主問題（LP）

目的関数 $\boldsymbol{z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n}$ ➡ **最大化**

制約条件

$$\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1}$$
$$\boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2}$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m}$$
$$\boldsymbol{x_{1,}x_2,\cdots,x_n \ge 0}$$

双対問題

- LPの主問題に対する双対問題（dual problem, DP）

双対問題（DP）

目的関数　$\boldsymbol{w = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m}$　➡最小化

制約条件

$$\boldsymbol{a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \cdots + a_{m1} y_m \geq c_1}$$
$$\boldsymbol{a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{m2} y_m \geq c_2}$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \cdots + a_{mn} y_m \geq c_n}$$
$$\boldsymbol{y_{1,} y_2, \cdots, y_m \geq 0}$$

双対問題（DP）の特徴

- 主問題のn個の変数$x_1, x_2, \cdots, x_n$がm個の変数$y_1, y_2, \cdots, y_m$に置き換わる
- 主問題のm個不等式制約条件がn個の不等式制約条件になっている
- 主問題と比べて不等式制約条件の**不等号の向きが反対**になっている
- 主問題の不等式制約条件の**係数a_{ij}がa_{ji}に転置**されている
- 主問題の目的関数zの係数$c_1, c_2, \cdots, c_n$が、不等式制約条件の右辺の定数となっている
- 主問題の不等式制約条件の右辺の定数$b_1, b_2, \cdots, b_m$が、目的関数wの係数になっている
- 主問題では目的関数zを最大にするのに対して、目的関数wを最小にする問題になっている

主問題

目的関数　$z = c^T x$ ➡ 最大化

制約条件　$Ax \leq b$

$x \geq 0$

双対問題

目的関数　$w = b^T y$ ➡ 最小化

制約条件　$A^T y \geq c$

双対問題　【例題１】

次の線形計画問題の双対問題を構成しなさい。

(LP)

目的関数　$z = x_1 + 2x_2$ ➡最大化

制約条件　$2x_1 - x_2 \leq 7$

$3x_1 + x_2 \leq 10$

$-x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1, x_2 \geq 0$

- この問題をシンプレックス法で解くことができる

- 不等式制約条件の双対変数をy_1, y_2, y_3とする
- 目的関数をwとする

（DP）

目的関数 $w = 7y_1 + 10y_2 + 18y_3$　最小化

制約条件　$2y_1 + 3y_2 - y_3 \geq 1$

$-y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 2$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

- この双対問題を標準形に書き直して、人工変数を導入した２段階法で解くことができる

双対問題【例題2】

ある工場で２種類の製品P1,P2を生産する。利益はそれぞれ３万円、５万円である。資源の制約は以下の通りである。

- 資材A：P1は最大４個まで（P2は消費しない）
- 資材B：P2は最大６個まで（P1は消費しない）
- 資材C：P1を3個、P2を2個使うと合計18単位まで

① 製品数をx_1（P1の個数）、x_2（P2の個数）として、利益最大化問題を定式化しなさい（主問題）

② 上記の主問題に対する双対問題を書きなさい

③ 主問題の最適解と最適値を求めなさい

④ 双対問題の最適化と最適値を求めなさい

双対問題【例題2】

ある工場で２種類の製品P1,P2を生産する。利益はそれぞれ３万円、５万円である。資源の制約は以下の通りである。

- 資材A：P1は最大４個まで（P2は消費しない）
- 資材B：P2は最大６個まで（P1は消費しない）
- 資材C：P1を3個、P2を2個使うと合計18単位まで

① 製品数をx_1（P1の個数）、x_2（P2の個数）として、利益最大化問題を定式化しなさい（主問題）

② 上記の主問題に対する双対問題を書きなさい

③ 主問題の最適解と最適値を求めなさい

④ 双対問題の最適化と最適値を求めなさい

① 利益最大化問題の定式化（主問題）

目的関数 $3x_1 + 5x_2$ ➡ **最大化**

制約条件 $x_1 \le 4$

$x_2 \le 6$

$3x_1 + 2x_2 \le 18$

$x_1, x_2 \ge 0$

$$c^T = [3,\quad 5] \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix}$$

②双対問題

目的関数 $4y_1 + 6y_2 + 18y_3$ ➡ **最小化**

制約条件 $y_1 + 3y_3 \ge 3$

$y_2 + 2y_3 \ge 5$

$y_1, y_2, y_3 \ge 0$

主問題

目的関数 $z = c^T x$ ➡ **最大化**

制約条件 $Ax \le b$

$x \ge 0$

双対問題

目的関数 $\mathrm{w} = b^T y$ ➡ **最小化**

制約条件 $A^T y \ge c$

双対問題【例題2】

③主問題の最適化解を求める（シンプレックス法を適用）

- **正準形の最大線形計画問題**

目的関数　$3x_1 + 5x_2$　➡　最大化

制約条件　$x_1 \leq 4$

$x_2 \leq 6$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1, x_2 \geq 0$

- **標準形の最小化問題に直す**

$z = -3x_1 - 5x_2$　➡　最小化

$(z + 3x_1 + 5x_2 = 0)$

$x_1 + y_1 = 4$

$x_2 + y_2 = 6$

$3x_1 + 2x_2 + y_3 = 18$

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

初期のシンプレックス表

基底変数	その他	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	比の計算
z	0	3	5	0	0	0	
y_1	4	1	0	1	0	0	
y_2	6	0	1	0	1	0	
y_3	18	3	2	0	0	1	

双対問題【例題2】

③主問題の最適化解を求める（シンプレックス法を適用）

基底変数	その他	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	比の計算
z	0	3	5	0	0	0	
y_1	4	1	0	1	0	0	4/0=∞
y_2	6	0	1	0	1	0	6/1=6
y_3	18	3	2	0	0	1	18/2=9

基底変数	その他	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	比の計算
z	-30	3	0	0	-5	0	
y_1	4	1	0	1	0	0	4/1=4
x_2	6	0	1	0	1	0	---
y_3	6	3	0	0	-2	1	6/3=2

基底変数	その他	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	比の計算
z	-36	0	0	0	-3	-1	
y_1	2	0	0	1	2/3	1/3	
x_2	6	0	1	0	1	0	
x_1	2	1	0	0	-2/3	1/2	

- 標準形の最小化問題に直す

$z = -3x_1 - 5x_2$ ➡ 最小化

$x_1 + y_1 = 4$

$x_2 + y_2 = 6$

$3x_1 + 2x_2 + y_3 = 18$

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

ピボットの変換(2回)

最適解

$x_1 = 2,\ x_2 = 6$

最適解の値

$z = 36$

双対問題【例題2】

- 標準形の最小化問題に直す

$$z = -3x_1 - 5x_2 \quad \Rightarrow \quad \text{最小化}$$
$$x_1 + y_1 = 4$$
$$x_2 + y_2 = 6$$
$$3x_1 + 2x_2 + y_3 = 18$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

③主問題の最適化解を求める（シンプレックス法を適用）

基底変数	その他	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	比の計算
z	0	3	5	0	0	0	
y_1	4	1	0	1	0	0	4/0= ∞
y_2	6	0	1	0	1	0	6/1=6
y_3	18	3	2	0	0	1	18/2=9

基底変数	その他	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	比の計算
z	-30	3	0	0	-5	0	
y_1	4	1	0	1	0	0	4/1=4
x_2	6	0	1	0	1	0	---
y_3	6	3	0	0	-2	1	6/3=2

基底変数	その他	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	比の計算
z	-36	0	0	0	-3	-1	
y_1	2	0	0	1	2/3	1/3	
x_2	6	0	1	0	1	0	
x_1	2	1	0	0	-2/3	1/2	

ピボットの変換(2回)

最適解

$$x_1 = 2, \ x_2 = 6$$

最適解の値

$$z = 36$$

双対問題【例題2】

④双対問題の最適化解を求める（２段階法）

- 正準形の最小線形計画問題

目的関数 $4y_1 + 6y_2 + 18y_3$ ➡ **最小化**

制約条件

$$y_1 + 3y_3 \geq 3$$

$$y_2 + 2y_3 \geq 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

- 標準形の最小化問題（スラック変数と人工変数を導入）

$z = 4y_1 + 6y_2 + 18y_3$ ➡ **最小化**

$(z + 3x_1 + 5x_2 = 0)$

$w = t_1 + t_2$ ➡ **最小化（補助目的関数）**

$$y_1 + 3y_3 - y_4 + t_1 = 3$$

$$y_2 + 2y_3 - y_5 + t_2 = 5$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, t_1, t_1 \geq 0$$

初期のシンプレックス表

基底変数	その他	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	t_1	t_2	比の計算
w	8	1	1	5	-1	-1	0	0	
z	0	-4	-6	-18	0	0	0	0	
t_1	3	1	0	3	-1	0	1	0	
t_2	5	0	1	2	0	-1	0	1	

双対問題【例題2】

④双対問題の最適化解を求める（２段階法）

基底変数	その他	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	t_1	t_2	比の計算
w	8	1	1	5	-1	-1	0	0	
z	0	-4	-6	-18	0	0	0	0	
t_1	3	1	0	3	-1	0	1	0	3/3=1
t_2	5	0	1	2	0	-1	0	1	5/2=2.5

基底変数	その他	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	t_1	t_2	比の計算
w	3	-2/3	1	0	2/3	-1	-5/3	0	
z	18	2	-6	0	-6	0	6	0	
y_3	1	1/3	0	1	-1/3	0	1/3	0	
t_2	3	-2/3	1	0	2/3	-1	-2/3	1	3/1=3

基底変数	その他	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	t_1	t_2	比の計算
w	0	0	0	0	0	0	-1	-1	
z	36	-2	0	0	-2	-6	2	6	
y_3	1	1/3	0	1	-1/3	0	1/3	0	
y_2	3	-2/3	1	0	2/3	-1	-2/3	1	

- 標準形の最小化問題（スラック変数と人工変数を導入）

$\mathbf{z = 4y_1 + 6y_2 + 18y_3}$ ➡ **最小化**

$\mathbf{(z + 3x_1 + 5x_2 = 0)}$

$\mathbf{w = t_1 + t_2}$ ➡ **最小化（補助目的関数）**

$\mathbf{y_1 + 3y_3 - y_4 + t_1 = 3}$

$\mathbf{y_2 + 2y_3 - y_5 + t_2 = 5}$

$\mathbf{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, t_1, t_1 \geq 0}$

人工変数に対するピボット変換

$w = 0$のとき

$\mathbf{y_1 = 0, y_2 = 3, y_3 = 1}$

最小値$\mathbf{z = 36}$

双対問題

線形計画問題の標準形を主問題に選ぶことにする

主問題
目的関数　$z = c^T x$ ➡ 最小
制約条件　$Ax = b$
$x \geq 0$
(問題3)

双対問題
目的関数　$\mathrm{w} = b^T y$ ➡ 最大化
制約条件　$A^T y \leq c$
(問題4)

双対問題を最小化の標準形にする
目的関数　$-\mathrm{w} = -b^T y_1 + -b^T y_2$➡ 最小化
制約条件　$A^T y_1 - A^T y_2 + y_3 = c$
$y_1, y_2, y_3 \geq 0$
(問題5)

- (問題4）の*定数 A,b,c* は主問題（問題３）とも共通
- 双対変数y は非負条件はない

- $y = y_1 - y_2$と置き換える
- 不等式制約$A^T y \leq c$にスラック変数$y_3 \geq 0$を導入
- 主問題が標準形なら、双対問題も標準形にできる

双対問題

(問題5)を主問題として、これの双対問題を作ってみる

主問題

目的関数　$z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$ ➡ 最小

制約条件　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$　　(問題3)

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

⇔

双対問題を最小化の標準形にする

目的関数　$-\mathbf{w} = -\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}_1 + -\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}_2$ ➡ 最小化

制約条件　$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{c}$

$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3 \geq \boldsymbol{0}$　　(問題5)

(問題3)と(問題5)は同形とみなすと次の対応になる

	(問題3)	(問題５)
費用ベクトル	$\boldsymbol{c}^T$	$(-\boldsymbol{b}^T, -\boldsymbol{b}^T, \boldsymbol{0}^T)$
変数ベクトル	$\boldsymbol{x}$	$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{y}_3 \end{bmatrix}$
右辺ベクトル	b	c
係数行列	A	$[\boldsymbol{A}^T, -\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{I}]$
双対変数ベクトル	y	λ

双対問題

(問題5)を主問題として、これの双対問題を作ってみる

主問題
目的関数　$-\mathrm{w} = -\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}_1 + -\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}_2$ ➡ 最小化
制約条件　$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3 \geq \boldsymbol{0}$　(問題5)

双対問題
目的関数　$\boldsymbol{c}^T\lambda$ ➡ 最大化
制約条件　$\boldsymbol{A}^T\lambda \leq -\boldsymbol{b}$
$-\boldsymbol{A}^T\lambda \leq \boldsymbol{b}$
$\lambda \leq \boldsymbol{0}$　(問題6)

(問題3)と(問題5)は同形とみなすと次の対応になる

	(問題3)	(問題５)
費用ベクトル	$\boldsymbol{c}^T$	$(-\boldsymbol{b}^T, -\boldsymbol{b}^T, \boldsymbol{0}^T)$
変数ベクトル	$\boldsymbol{x}$	$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{y}_3 \end{bmatrix}$
右辺ベクトル	b	c
係数行列	A	$[\boldsymbol{A}^T, -\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{I}]$
双対変数ベクトル	y	λ

- $\boldsymbol{c}^T\lambda$の最大化と$-\boldsymbol{c}^T\lambda$の最小化に等しい
- $\boldsymbol{A}^T\lambda \leq -\boldsymbol{b}$かつ $-\boldsymbol{A}^T\lambda \leq \boldsymbol{b}$は$\boldsymbol{A}^T\lambda = -\boldsymbol{b}$に等しい
- $\boldsymbol{x} = \lambda$ とおけば(問題5)

双対問題（問題６）は(問題3)と等しい

演習課題

ある工場では、２種類の製品A,Bを生産している。製品Aの利益は4万円/個、製品Bの利益は3万円/個である。

使用する資源は以下の通りである。

- **資源X：製品Aは最大５個まで生産可能（製品Bは消費しない）**
- **資源Y：製品AとBは合わせて「製品Aの個数＋製品Bの個数」が８個まで**
- **資源Z：製品Aを2個、製品Bを1個使うことに、合計10単位まで**

製品Aの生産量をx_1、製品Ｂの生産量をx_2とする。

①　上記の説明に基づき、主問題（利益最大化問題）を数式で定式化せよ

②　定式化した主問題に対する双対問題を書きなさい（双対変数y_1, y_2, y_3を用いること）

③　主問題の最適解（ x_1, x_2)と最適値（最大利益）をシンプレックスで求めよ

④　双対問題の最適解（ y_1, y_2, y_3）と最適値を２段階法で求めよ