数理計画論

第6回目

- **2段階法**

シンプレックス法

- シンプレックス表を改訂しながら最適解を求める方法
- ピボット列の選び方：
  - z行の係数中で正のものがあれば、その一つを選ぶ
- ピボット行の選び方：
  - 上で選んだ列の正の係数で、各行の基底解の値を割る
  - 最小値を与える行を一つ選ぶ
- ピボット列を選ぶ際に、一般にはもっとも大きい正の係数を持つ列を選ぶのが得策である
- ピボット行の選び方の中の計算は比の計算である

【シンプレックス法の例】

- 正準形の線形計画問題をシンプレックス法で解いてみる

目的関数　$2x_1 + 3x_2$　➡　max

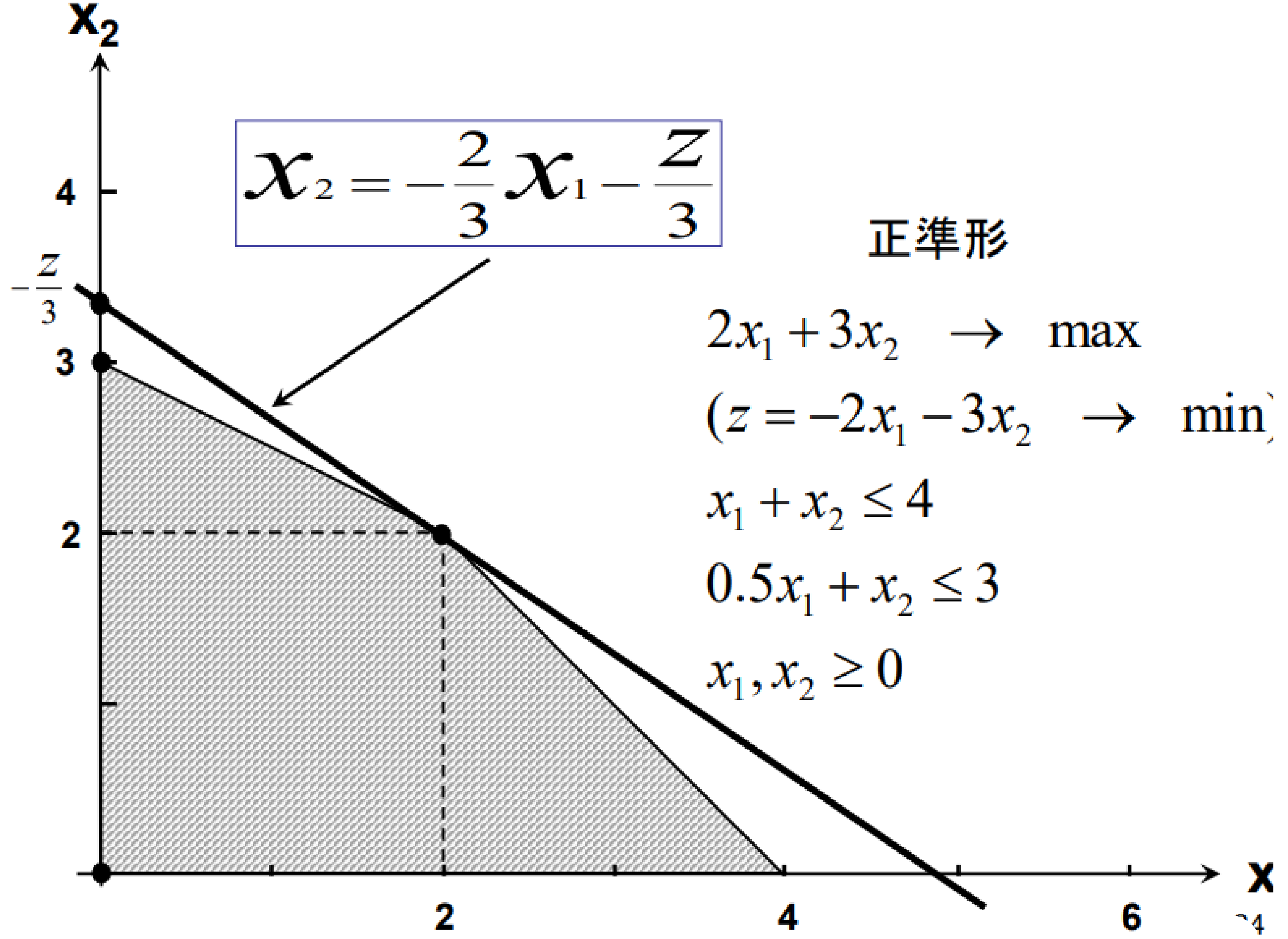
制約条件　$x_1 + x_2 \leq 4$

$0.5x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

【シンプレックス法の例】

（1）$x_1 - x_2$平面上で実行可能領域を図示する



$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 - \frac{z}{3}$$

$-\frac{z}{3}$

正準形

$$2x_1 + 3x_2 \quad \rightarrow \quad \max$$

$$(z = -2x_1 - 3x_2 \quad \rightarrow \quad \min)$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$0.5x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

【シンプレックス法の例】

（2）標準形を求める

- 正準形の線形計画問題をシンプレックス法で解いてみる

目的関数　$2x_1 + 3x_2$　➡　max

制約条件　$x_1 + x_2 \leq 4$

$0.5x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

- 標準形の最小化問題に直す

$z = -2x_1 - 3x_2$　➡　min

$x_1 + x_2 + y_1 = 4$

$0.5x_1 + x_2 + y_2 = 3$

$x_1, x_2, y_1, y_2, \geq 0$

【シンプレックス法の例】

（3）シンプレックス表を求める

基底変数	その他	x_1	x_2	y_1	y_2	比の計算
z	0	2	3	0	0	
y_1	4	1	1	1	0	
y_2	3	0.5	1	0	1	

$$0 = \mathrm{z} + 2x_1 + 3x_2$$
$$4 = x_1 + x_2 + y_1$$
$$3 = 0.5x_1 + x_2 + y_2$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, \geq 0$$

- 標準形

$$\mathrm{z} = -2x_1 - 3x_2 \quad ➡ \quad \mathrm{min}$$
$$x_1 + x_2 + y_1 = 4$$
$$0.5x_1 + x_2 + y_2 = 3$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, \geq 0$$

係数及び左辺の数値を
シンプレックス表に入れる

【シンプレックス法の例】

（4）ピボット変換

（a）

基底変数	その他	x_1	x_2	y_1	y_2	比の計算
z	0	2	3	0	0	
y_1	4	1	1	1	0	4/1=4
y_2	3	0.5	1	0	1	3/1=3

（b）

基底変数	その他	x_1	x_2	y_1	y_2	
z	-9	0.5	0	0	-3	
y_1	1	0.5	0	1	-1	
x_2	3	0.5	1	0	1	

①－3*③

②－③

- 標準形

$$z = -2x_1 - 3x_2 \quad ➡ \quad \min$$
$$x_1 + x_2 + y_1 = 4$$
$$0.5x_1 + x_2 + y_2 = 3$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, \geq 0$$

$$0 = z + 2x_1 + 3x_2 \quad ①$$
$$4 = x_1 + x_2 + y_1 \quad ②$$
$$3 = 0.5x_1 + x_2 + y_2 \quad ③$$

- 比の計算を行いピボット要素を決定する
- ピボット変換を行う

【シンプレックス法の例】

- 標準形

$z = -2x_1 - 3x_2$ ➡ min

$x_1 + x_2 + y_1 = 4$

$0.5x_1 + x_2 + y_2 = 3$

$x_1, x_2, y_1, y_2, \geq 0$

（4）ピボット変換

（b）

基底変数	その他	x_1	x_2	y_1	y_2	比の計算
z	-9	0.5	0	0	-3	
y_1	1	0.5	0	1	-1	1/0.5=2
x_2	3	0.5	1	0	1	3/0.5=6

$-9 = z + 0.5x_1 - 3\,y_2$ ①

$1 = 0.5x_1 + y_1 - y_2$ ②

$3 = 0.5x_1 + x_2 + y_2$ ③

- 比の計算を行いピボット要素を決定する
- ピボット変換を行う

（C）

基底変数	その他	x_1	x_2	y_1	y_2	比の計算
z	-10	0	0	-1	-2	
x_1	2	1	0	2	-2	
x_2	2	0	1	-1	2	

①-②

②* 2

③-②

答え：

$x_1 = 2, x_2 = 2$ のとき、

最大値は10

行列とベクトルによる問題の表現

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&0&0\\1&0&0&1&0\\0&1&0&0&1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix},\ \mathrm{c}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ 0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

目的関数	$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$	➡	**最小化**
制約条件	$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$		
	$\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}$		

①

T:転置

$x\geq 0$ ➡ $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{y_1}$, $\boldsymbol{y_2}$, $\boldsymbol{y_3}\geq\boldsymbol{0}$

A:係数行列

b:右辺ベクトル

c:費用ベクトル

$\boldsymbol{x}$**：変数ベクトル**

0：0ベクトル

最小問題にする（対象問題）

標準形：

- **目的関数** $\boldsymbol{z=-x_1-x_2}$ ➡ **最小化**
- **制約条件**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x_1+2x_2+y_1}\qquad\qquad&=\boldsymbol{3}\\\boldsymbol{x_1}\qquad\qquad+\boldsymbol{y_2}\qquad&=\boldsymbol{2}\\\boldsymbol{x_2}\qquad\qquad+\boldsymbol{y_3}&=\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2}\geq\boldsymbol{0}&\\\boldsymbol{y_1},\ \boldsymbol{y_2},\ \boldsymbol{y_3}\geq\boldsymbol{0}&\end{aligned}$$

行列とベクトルを定義すると、①は一般の線形計画問題を表す

基底行列

標準形：

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + y_1 &= 3 \\
x_1 + y_2 &= 2 \\
x_2 + y_3 &= 1
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

A: x_1, x_2 が非基底変数で、 y_1, y_2, y_3 が基底変数の時、

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 3 - x_1 + 2x_2 \\
y_2 &= 2 - x_1 \\
y_3 &= 1 - x_2
\end{aligned}
$$

$$
z = -x_1 - x_2
$$

基底行列Bと非基底行列N（係数行列Aから）：

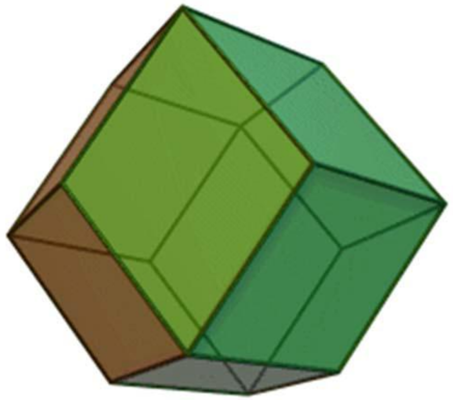
$$
B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

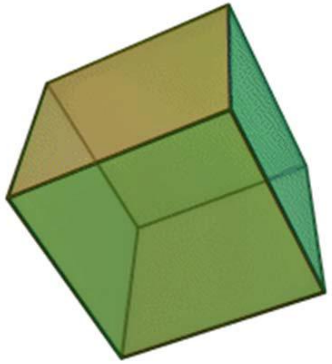
実行可能領域と最適解の性質

- 一般のn 変数の線形計画問題の場合
  - 実行可能領域は、n 次元実数空間における凸多面体
  - 凸多面体の頂点の中に、必ず最適解が存在

- 最適解を見つけるには、実行可能領域の頂点を全て調べればよい

- 単純なやり方で頂点を調べると、指数時間が必要
  - 超立方体の場合，頂点の数は2^n 個
- 効率的に頂点を調べて最適解を見つける方法
  - シンプレックス法（単体法）





有界と非有界

- **有界**
  - 制約条件を満たす**実行可能領域が有限の範囲に収まっている**状態
  - 実行可能領域が有界かつ空でない場合、必ず最適解が存在する
  - グラフ上で、**閉じた**多角形（または凸多面体）の**領域に**なる

- **非有界**
  - 目的関数の値が無限に大きく（または小さく）改善できる、つまり**最適解が有限の値として確定できない状態**
  - **シンプレックス法**において、基底変数を改善する際に**基底に入る変数が基底から出る条件を満たさない**場合に発生する

- 実行可能領域が**無限大でも**、目的関数がその**範囲内で有界**であれば**最適解は存在**する

2段階法の導入

目的関数　$z = 3x_1 + 2x_2 \quad ➡ \quad \min$

制約条件　$2x_1 + x_2 \geq 20$

$4x_1 + 3x_2 \geq 56$

$5x_1 + 4x_2 \geq 73$

$x_1, x_2 \geq 0$

最小化問題
(1)

目的関数　$z = 3x_1 + 2x_2 \quad ➡ \quad \min$

制約条件　$2x_1 + x_2 - x_3 = 20$

$4x_1 + 3x_2 - x_4 = 56$

$5x_1 + 4x_2 - x_5 = 73$

$x_1, x_2, x_{3,} x_4, x_5 \geq 0$

不等式制約を等式制約プラス符号制約
に変換（余剰変数$x_{3,} x_4, x_5$を導入）
(2)

$$x_3 = -20 + 2x_1 + x_2 = -20$$
$$x_4 = -56 + 4x_1 + 3x_2 = -56$$
$$x_5 = -73 + 5x_1 + 4x_2 = -73$$
$$x_1, x_2, x_{3,} x_4, x_5 \geq 0$$

$x_1 = 0, x_2 = 0$

$x_3 = -20, \quad x_4 = -56, \quad x_5 = -73$

非負条件に違反する

↓

可能基底解ではない

２段階法の導入

目的関数　$z = 3x_1 + 2x_2$　➡　min

制約条件　$2x_1 + x_2 \geq 20$

$4x_1 + 3x_2 \geq 56$

$5x_1 + 4x_2 \geq 73$

$x_1, x_2 \geq 0$

最小化問題
(1)

目的関数　$z = 3x_1 + 2x_2$　➡　min

制約条件　$2x_1 + x_2 - x_3 = 20$

$4x_1 + 3x_2 - x_4 = 56$

$5x_1 + 4x_2 - x_5 = 73$

$x_1, x_2, x_{3,} x_4, x_5 \geq 0$

不等式制約を等式制約プラス符号制約
に変換（余剰変数$x_{3,} x_4, x_5$を導入）
(2)

目的関数　$z = 3x_1 + 2x_2$　➡　min

制約条件　$2x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 20$

$4x_1 + 3x_2 - x_4 + y_2 = 56$

$5x_1 + 4x_2 - x_5 + y_3 = 73$

$x_1, x_2, x_{3,} x_4, x_5, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

人工変数y_1, y_2, y_3 を導入
(3)

２段階法の導入

目的関数　$z = 3x_1 + 2x_2$ ➡ min

制約条件　$2x_1 + x_2 \geq 20$

$4x_1 + 3x_2 \geq 56$

$5x_1 + 4x_2 \geq 73$

$x_1, x_2 \geq 0$

最小化問題
(1)

目的関数　$z = 3x_1 + 2x_2$ ➡ min

制約条件　$2x_1 + x_2 - x_3 = 20$

$4x_1 + 3x_2 - x_4 = 56$

$5x_1 + 4x_2 - x_5 = 73$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

余剰変数x_3, x_4, x_5を導入
(2)

目的関数　$z = 3x_1 + 2x_2$ ➡ min

制約条件　$2x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 20$

$4x_1 + 3x_2 - x_4 + y_2 = 56$

$5x_1 + 4x_2 - x_5 + y_3 = 73$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

人工変数y_1, y_2, y_3 を導入
(3)

問題(3)に対して、新しい目的関数
$\mathrm{w} = y_1 + y_2 + y_3$ ➡ min

$$
\begin{aligned}
\mathrm{w} &= (20 - 2x_1 - x_2 + x_3) + (56 - 4x_1 - 3x_2 + x_4) \\
&+ (73 - 5x_1 - 4x_2 + x_5) = 149 - 11x_1 - 8x_2 + x_3 + x_4 - x_5
\end{aligned}
$$

- **第１段階： w の最小化を行うシンプレックス法**
- **第２段階：従来のzの最小化を行うシンプレックス法**

２段階法

- 2段階法（Two-Phase Method）は、**人工変数**を含む線形計画問題を**シンプレックス法**で解くための手法
  - 初期の基本実行可能解が得られない場合がある
  - 等式制約や「≥」**制約**が含まれる場合に必要

- 第１段階
  - 人工変数を導入し、**人工変数の和を最小化する補助問題**を解く
  - この最小値が0になれば → 実行可能解が存在
  - 0にならない → 元の問題は実行不可能

- 第２段階
  - 第1段階で得た**実行可能解を初期解**として元の目的関数を最適化
  - シンプレックス法を適用する

2段階法の流れ

1. 標準形に変換（余剰変数（スラック）変数を導入）
2. 人工変数を導入
3. 第1段階(補助問題）を解く
4. 第2段階（元の問題）を解く

２段階法　【例題】

目的関数　$z = 3x_1 + 2x_2$　➡　min

制約条件　$2x_1 + x_2 \geq 20$

$4x_1 + 3x_2 \geq 56$

$5x_1 + 4x_2 \geq 73$

$x_1, x_2 \geq 0$

1. **標準形に変換（スラック変数**$x_{3,} x_4, x_5$）

目的関数　$z = 3x_1 + 2x_2$　➡　min

制約条件　$2x_1 + x_2 - x_3 = 20$

$4x_1 + 3x_2 - x_4 = 56$

$5x_1 + 4x_2 - x_5 = 73$

$x_1, x_2, x_{3,} x_4, x_5 \geq 0$

2段階法 【例題】

2. **人工変数y_1, y_2, y_3 を導入**

目的関数　$z = 3x_1 + 2x_2$ ➡ min

制約条件　$2x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 20$

$4x_1 + 3x_2 - x_4 + y_2 = 56$

$5x_1 + 4x_2 - x_5 + y_3 = 73$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

$y_1 = 20 - 2x_1 - x_2 + x_3$
$y_2 = 56 - 4x_1 - 3x_2 + x_4$
$y_3 = 73 - 5x_1 - 4x_2 + x_5$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

3. 第１段階（補助問題）を解く

(1)人工変数y_1, y_2, y_3を基底変数とする

(2)新しい目的関数のシンプレックス表

新しい目的関数

$w = y_1 + y_2 + y_3$ ➡ min

表(a')

基底	その値	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3
w	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1
z	0	-3	-2	0	0	0	0	0	0
y_1	20	2	1	-1	0	0	1	0	0
y_2	56	4	3	0	-1	0	0	1	0
y_3	73	5	4	0	0	-1	0	0	1

2段階法 【例題】

3. 第1段階（補助問題）を解く

(3)**新しい目的関数** $w = y_1 + y_2 + y_3$ を非基底変数で表す

$$
\begin{aligned}
w &= (20 - 2x_1 - x_2 + x_3) \\
&+ (56 - 4x_1 - 3x_2 + x_4) \\
&+ (73 - 5x_1 - 4x_2 + x_5) \\
&= 149 - 11x_1 - 8x_2 + x_3 + x_4 - x_5
\end{aligned}
$$

(4) シンプレックス法を ***w*に適用(ピボット変換)**

表(a) ➡表(b)➡表(c)

wを非基底変数で表現

表(a)

基底	その値	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	比の計算
w	149	11	8	-1	-1	-1	0	0	0	
z	0	-3	-2	0	0	0	0	0	0	
y_1	20	2	1	-1	0	0	1	0	0	20/2=10
y_2	56	4	3	0	-1	0	0	1	0	56/4=14
y_3	73	5	4	0	0	-1	0	0	1	73/5=14.6

表(b)

基底	その値	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	比の計算
w	39	0	5/2	9/2	-1	-1	-11/2	0	0	
z	30	0	-1/2	-3/2	0	0	3/2	0	0	
x_1	10	1	1/2	-1/2	0	0	1/2	0	0	---
y_2	16	0	1	2	-1	0	-2	1	0	15/2=8
y_3	23	0	3/2	5/2	0	-1	-5/2	0	1	23/(5/2)=9.2

表(c)

基底	その値	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	比の計算
w	3	0	1/4	0	5/4	-1	-1	-9/4	0	
z	42	0	1/4	0	-3/4	0	0	3/4	0	
x_1	14	1	3/4	0	-1/4	0	0	1/4	0	---
x_3	8	0	1/2	1	-1/2	0	-1	1/2	0	---
y_3	3	0	1/4	0	5/4	-1	0	-5/4	1	3/(5/4)=2.4

２段階法　【例題】

3. 第１段階（補助問題）を解く

(3)**新しい目的関数**　$w = y_1 + y_2 + y_3$　を非基底変数で表す

$$\begin{aligned} w &= (20 - 2x_1 - x_2 + x_3) \\ &+ (56 - 4x_1 - 3x_2 + x_4) \\ &+ (73 - 5x_1 - 4x_2 + x_5) \\ &= 149 - 11x_1 - 8x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \end{aligned}$$

(4) シンプレックス法を***w*に適用(ピボット変換)**

表(c) ➡表(d)

wを非基底変数で表現

表(c)

基底	その値	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	比の計算
w	3	0	1/4	0	5/4	-1	-1	-9/4	0	
z	42	0	1/4	0	-3/4	0	0	3/4	0	
x_1	14	1	3/4	0	-1/4	0	0	1/4	0	---
x_3	8	0	1/2	1	-1/2	0	-1	1/2	0	---
y_3	3	0	1/4	0	5/4	-1	0	-5/4	1	3/(5/4)=2.4

表(d)

基底	その値	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3
w	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1
z	219/5	0	2/5	0	0	-3/5	0	0	3/5
x_1	73/5	1	4/5	0	0	-1/5	0	0	1/5
x_3	46/5	0	3/5	1	0	-2/5	-1	0	2/5
x_4	12/5	0	1/5	0	1	-4/5	0	-1	4/5

- **補助問題w=0になった**
- **このとき、 y_1, y_2, y_3 とx_2, x_5 が非基底変数**
- **次のステップに進む**
- **w行とy_1, y_2, y_3を除く**

2段階法 【例題】

4．第2段階（元の問題）を解く

- $z = 3x_1 + 2x_2$ ➡ min
- x_2, x_5 **が非基底変数,** x_1, x_3, x_4 **は基底変数**をとして、シンプレックス法を適用

- zの係数はすべて負になっていない
- 表（d'）➡表(e) ➡表（f）
- 表（f）のｚ行では、変数の係数はすべて負となり➡最適解

最適解 $x_1 = 2,\ x_2 = 16$
最適解の値 $z = 38$

zを目的関数とする

表(d')

基底	その値	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	比の計算
z	219/5	0	2/5	0	0	-3/5	
x_1	73/5	1	4/5	0	0	-1/5	(73/5)/(4/5)=18.3
x_3	46/5	0	3/5	1	0	-2/5	(46/5)/(3/5)=15.3
x_4	12/5	0	1/5	0	1	-4/5	(12/5)/(1/5)=12

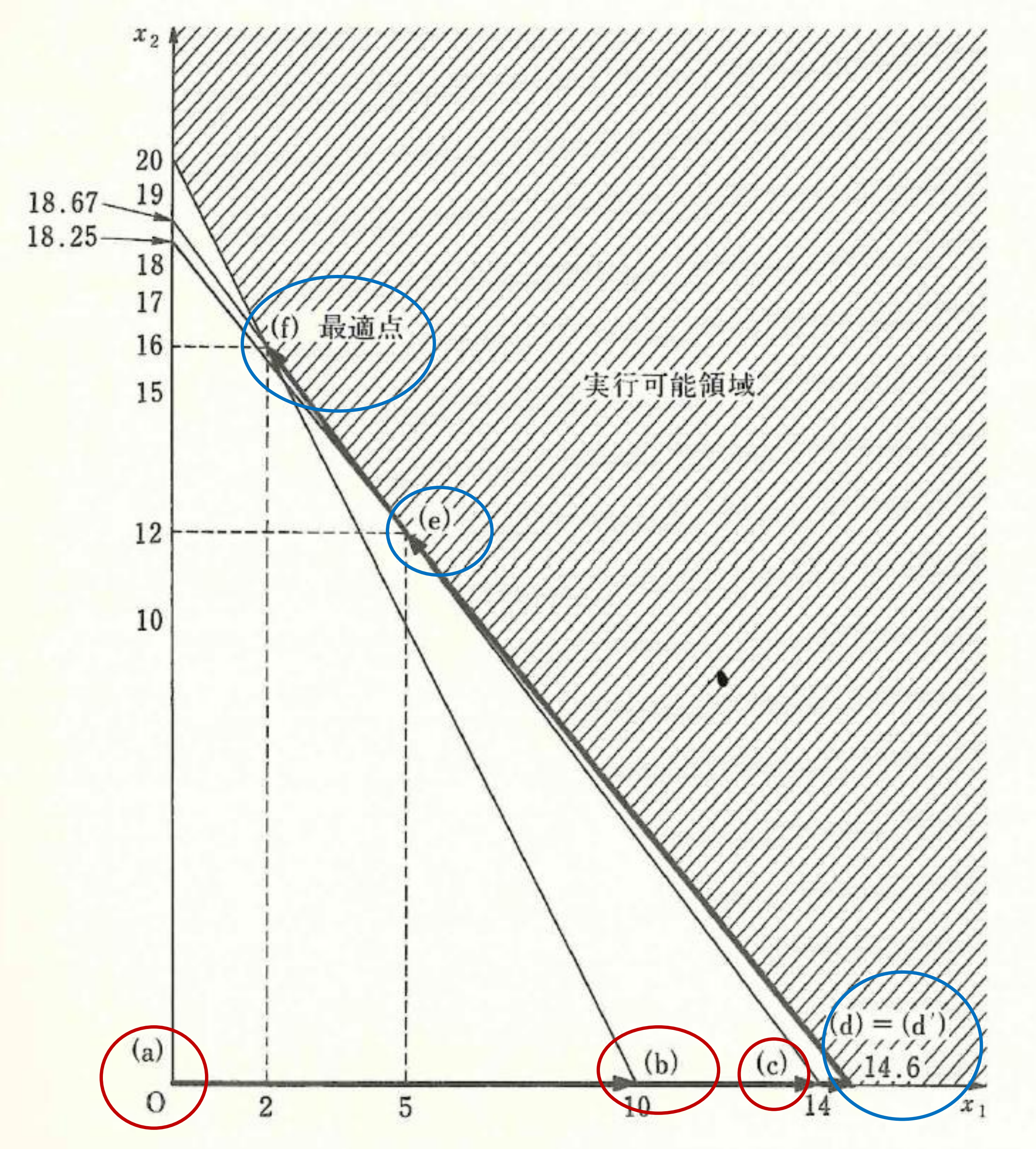
表(e)

基底	その値	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	比の計算
z	39	0	0	0	-2	1	
x_1	5	1	0	0	-4	3	5/3=1.7
x_3	2	0	0	1	-3	2	2/2=1
x_2	12	0	1	0	5	-4	---

基底	その値	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	38	0	0	-1/2	-1/2	0	
x_1	2	1	0	-3/2	1/2	0	
x_5	1	0	0	1/2	-3/2	1	
x_2	16	0	1	0	5	0	

２段階法 【例題】

- 表 (a')～表 (f)の結果を $x_1 - x_2$ 平面上に図示したもの
- 表(a)～(d)で定まる点(x_1, x_2)は実行可能領域を目指し、移動する
- 表(d')～(f)では、最適点（2,16)を目指して移動する



【２段階法　解く手順】

(1) 標準形への変換

- スラック変数・人工変数を導入し、等式制約に直しなさい
- どの変数を **初期基底** にするか明示しなさい

(2) 第1段階

- 補助問題の目的関数を設定しなさい
- 初期シンプレックス表を作成しなさい
- ピボット操作を行い、**人工変数がすべて基底変数から除去すること**を確認しなさい

(3) 第2段階（重要）

- 元の目的関数に戻し、**第2段階の初期表**を作成しなさい
- 最適性条件を確認し、**ピボット変換が必要であることを示しなさい**
- ピボット操作を行い、最適解を求めなさい

(4) 解の確認

求めた解が、元の制約条件を満たしていることを確認しなさい

２段階法　【演習問題１】

- **次の最小化問題を考えてみる**

目的関数　$\boldsymbol{z = x_1 + 2x_2}$　➡　**min**

制約条件　$\boldsymbol{x_1 + x_2 \geq 4}$

$$\boldsymbol{2x_1 + x_2 \geq 5}$$

$$\boldsymbol{x_1, x_2 \geq 0}$$