

# 数理計画論

## 第5回目

- 標準形と行列形式
- 有界と非有界

# 【演習問題】

- 次の正準形の線形計画問題をシンプレックス法で解きなさい。

目的関数  $4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

制約条件  $x_1 + 2x_2 \leq 2$

$$12x_1 + 18x_2 \leq 19$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# 【シンプレックス法の例 解答】

(1) シンプレックス表を求める

基底変数	その他	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	比の計算
$z$	0	4	3	0	0	0	
$y_1$	2	1	2	1	0	0	
$y_2$	19	12	18	0	1	0	
$y_3$	7	6	4	0	0	1	

• 標準形

$$\begin{aligned} z = -4x_1 - 3x_2 &\rightarrow \min \\ x_1 + 2x_2 + y_1 &= 2 \\ 12x_1 + 18x_2 + y_2 &= 19 \\ 6x_1 + 4x_2 + y_3 &= 7 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= z + 4x_1 + 3x_2 \\ 2 &= x_1 + 2x_2 + y_1 \\ 19 &= 12x_1 + 18x_2 + y_2 \\ 7 &= 6x_1 + 4x_2 + y_3 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

# 【シンプレックス法の例 解答】

## (2)ピボット変換

(a)

基底変数	その他	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	比の計算
$z$	0	4	3	0	0	0	
$y_1$	2	1	2	1	0	0	2/1
$y_2$	19	12	18	0	1	0	19/12
$y_3$	7	6	4	0	0	1	7/6

(b)



基底変数	その他	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	比の計算
$z$	-14/3	0	1/3	0	0	-2/3	
$y_1$	5/6	0	4/3	1	0	-1/6	
$y_2$	5	0	10	0	1	-1	
$x_1$	7/6	1	2/3	0	0	1/6	

• 標準形

$$z = -4x_1 - 3x_2 \quad \rightarrow \quad \min$$

$$x_1 + 2x_2 + y_1 = 2$$

$$12x_1 + 18x_2 + y_2 = 19$$

$$6x_1 + 4x_2 + y_3 = 7$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, \geq 0$$

# 【シンプレックス法の例 解答】

## (2)ピボット変換

(b)

基底変数	その他	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	比の計算
$z$	-14/3	0	1/3	0	0	-2/3	
$y_1$	5/6	0	4/3	1	0	-1/6	(5/6)/(4/3)
$y_2$	5	0	10	0	1	-1	5/10=1/2
$x_1$	7/6	1	2/3	0	0	1/6	(7/6)/(2/3)

• 標準形

$$z = -4x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + y_1 = 2$$

$$12x_1 + 18x_2 + y_2 = 19$$

$$6x_1 + 4x_2 + y_3 = 7$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, \geq 0$$

(c)



基底変数	その他	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	比の計算
$z$	-29/6	0	0	0	-1/30	-2/3	
$y_1$	1/6	0	0	1	-2/15	1/10	
$x_2$	1/2	0	1	0	1/10	-1/5	
$x_1$	5/6	1	0	0	-1/15	3/10	

答え：

$$x_1 = \frac{5}{6}, x_2 = \frac{1}{2}$$

のとき、

最大値は29/6となる

# シンプレックス法

- シンプレックス表を改訂しながら最適解を求める方法
- ピボット列の選び方：
  - z行の係数中で正のものがあれば、その一つを選ぶ
- ピボット行の選び方：
  - 上で選んだ列の正の係数で、各行の基底解の値を割る
  - 最小値を与える行を一つ選ぶ
- ピボット列を選ぶ際に、一般にはもっとも大きい正の係数を持つ列を選ぶのが得策である
- ピボット行の選び方の中の計算は比の計算である

# 【シンプレックス法の例】

- 正準形の線形計画問題をシンプレックス法で解いてみる

目的関数  $2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

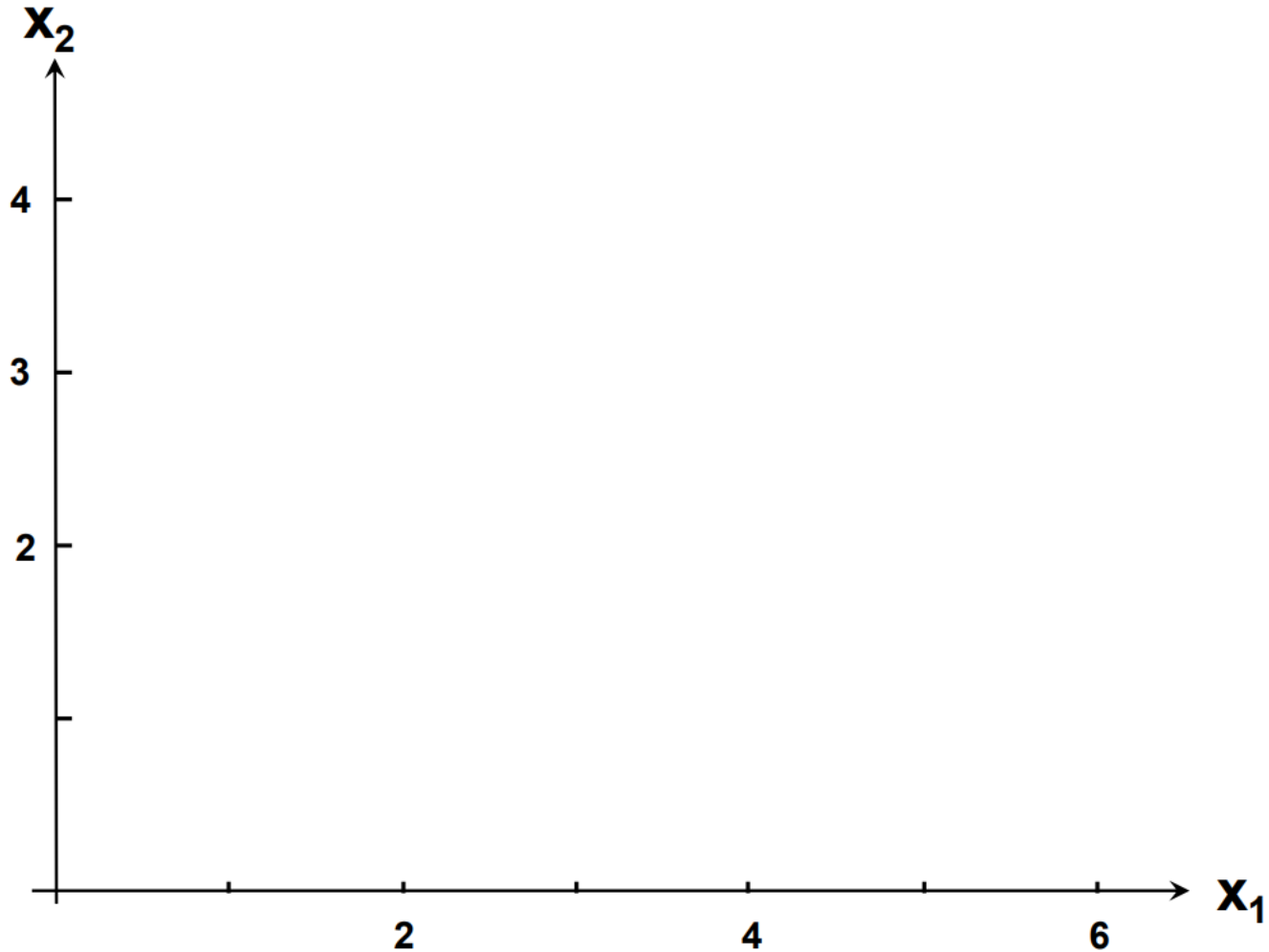
制約条件  $x_1 + x_2 \leq 4$

$$0.5x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# 【シンプレックス法の例】

(1)  $x_1 - x_2$ 平面上で実行可能領域を図示する



正準形

$$2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$(z = -2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min)$$

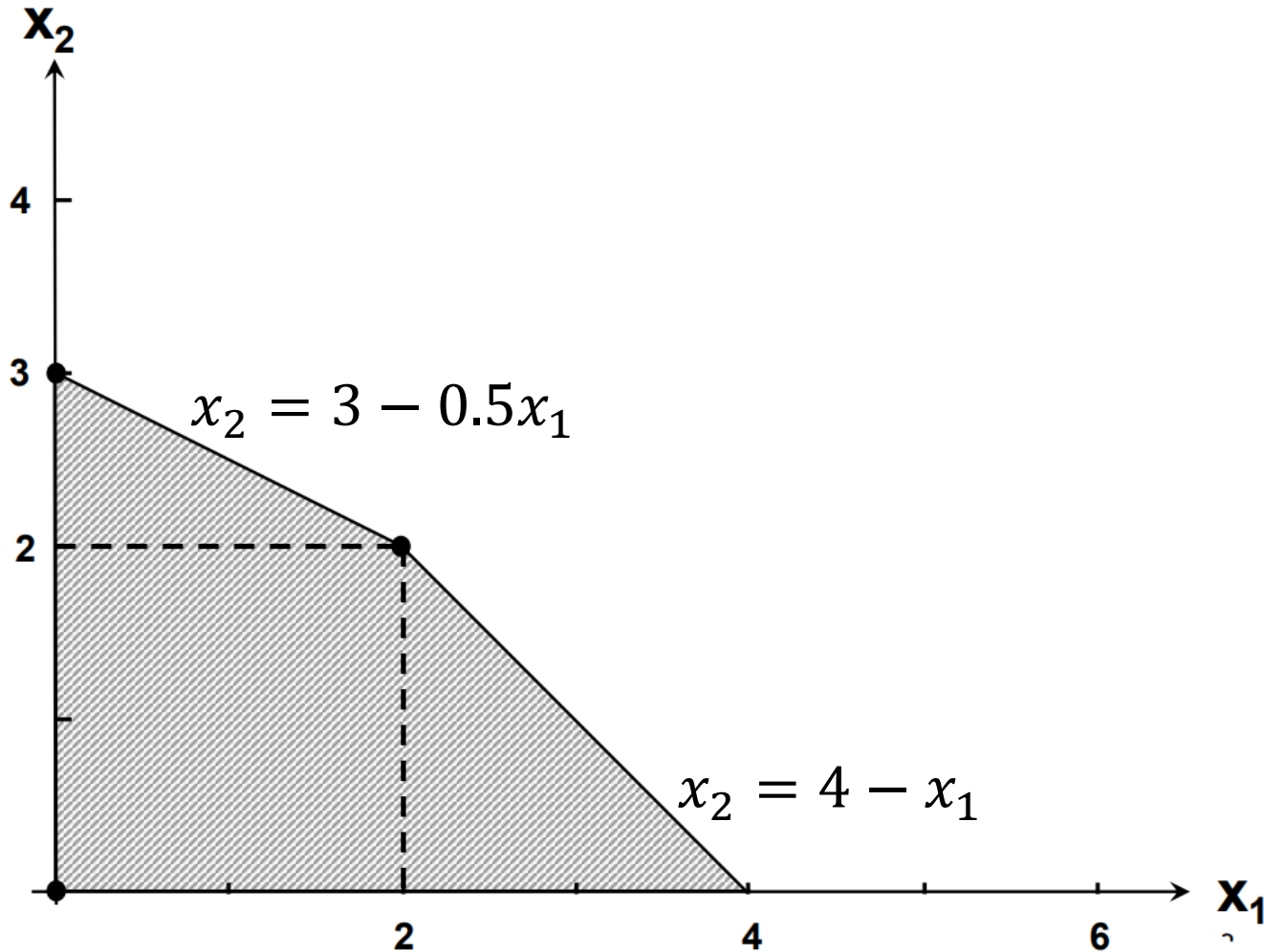
$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$0.5x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# 【シンプレックス法の例】

(1)  $x_1 - x_2$ 平面上で実行可能領域を図示する



正準形

$$2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$(z = -2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min)$$

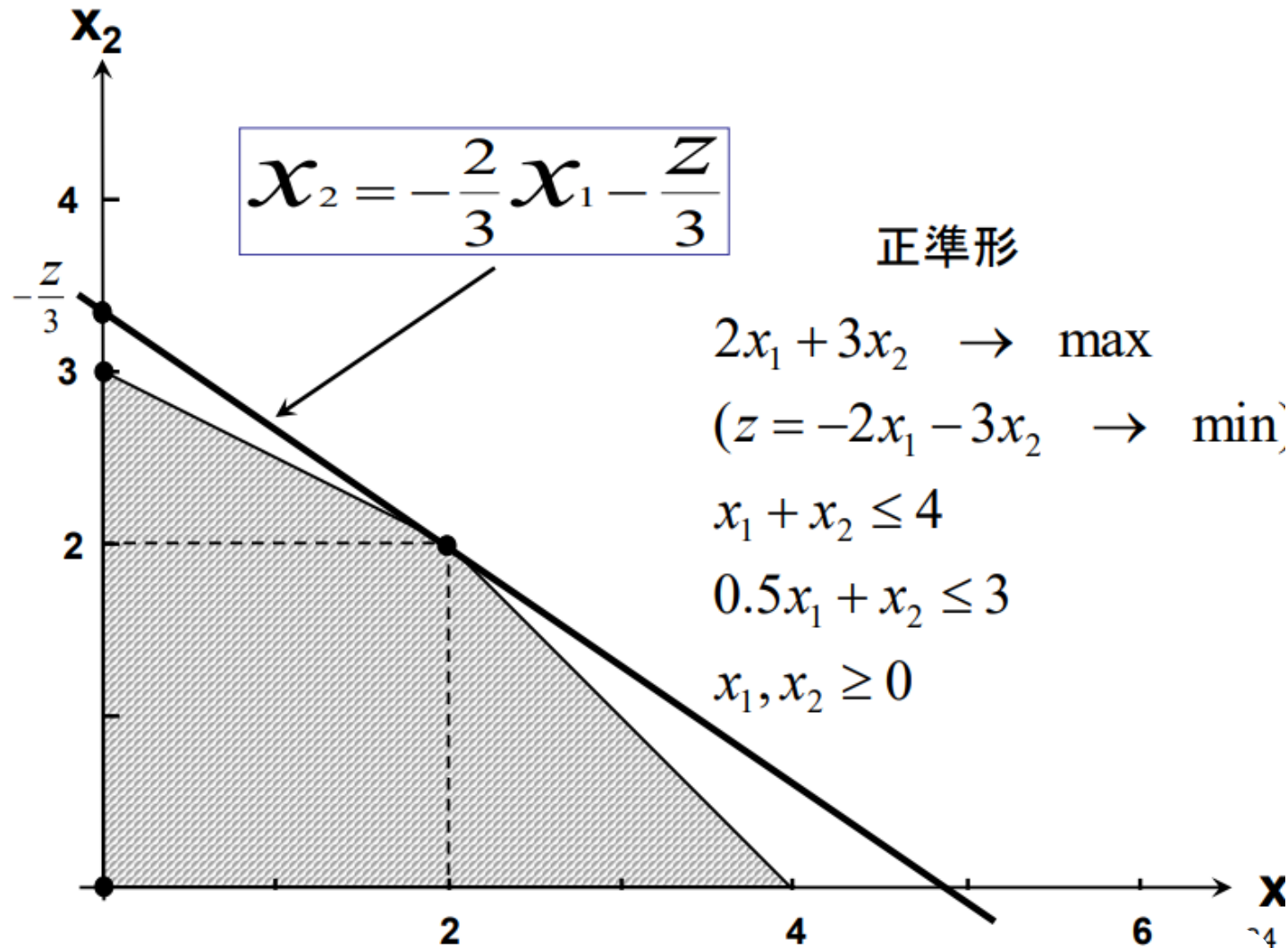
$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$0.5x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# 【シンプレックス法の例】

(1)  $x_1 - x_2$ 平面上で実行可能領域を図示する



# 【シンプレックス法の例】

## (2) 標準形を求める

- 正準形の線形計画問題をシンプレックス法で解いてみる

目的関数  $2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

制約条件  $x_1 + x_2 \leq 4$

$$0.5x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



- 標準形の最小化問題に直す

$$z = -2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + y_1 = 4$$

$$0.5x_1 + x_2 + y_2 = 3$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$$

# 【シンプレックス法の例】

(3) シンプレックス表を求める

基底変数	その他	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	比の計算
$z$	0	2	3	0	0	
$y_1$	4	1	1	1	0	
$y_2$	3	0.5	1	0	1	

$$\begin{aligned}0 &= z + 2x_1 + 3x_2 \\4 &= x_1 + x_2 + y_1 \\3 &= 0.5x_1 + x_2 + y_2 \\x_1, x_2, y_1, y_2 &\geq 0\end{aligned}$$

• 標準形

$$\begin{aligned}z &= -2x_1 - 3x_2 \quad \rightarrow \min \\x_1 + x_2 + y_1 &= 4 \\0.5x_1 + x_2 + y_2 &= 3 \\x_1, x_2, y_1, y_2 &\geq 0\end{aligned}$$

係数及び左辺の数値を  
シンプレックス表に入れる

# 【シンプレックス法の例】

## (4) ピボット変換

(a)

基底変数	その他	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	比の計算
$z$	0	2	3	0	0	
$y_1$	4	1	1	1	0	4/1=4
$y_2$	3	0.5	1	0	1	3/1=3



(b)

基底変数	その他	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	
$z$	-9	0.5	0	0	-3	
$y_1$	1	0.5	0	1	-1	
$x_2$	3	0.5	1	0	1	

• 標準形

$$z = -2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + y_1 = 4$$

$$0.5x_1 + x_2 + y_2 = 3$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, \geq 0$$

$$0 = z + 2x_1 + 3x_2 \quad \textcircled{1}$$

$$4 = x_1 + x_2 + y_1 \quad \textcircled{2}$$

$$3 = 0.5x_1 + x_2 + y_2 \quad \textcircled{3}$$

- 比の計算を行いピボット要素を決定する
- ピボット変換を行う

$$\textcircled{1} - 3 * \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3}$$

# 【シンプレックス法の例】

## (4) ピボット変換

(b)

基底変数	その他	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	比の計算
$z$	-9	0.5	0	0	-3	
$y_1$	1	0.5	0	1	-1	$1/0.5=2$
$x_2$	3	0.5	1	0	1	$3/0.5=6$



(c)

基底変数	その他	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	比の計算
$z$	-10	0	0	-1	-2	
$x_1$	2	1	0	2	-2	
$x_2$	2	0	1	-1	2	

• 標準形

$$z = -2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + y_1 = 4$$

$$0.5x_1 + x_2 + y_2 = 3$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, \geq 0$$

$$-9 = z + 0.5x_1 - 3y_2 \quad \textcircled{1}$$

$$1 = 0.5x_1 + y_1 - y_2 \quad \textcircled{2}$$

$$3 = 0.5x_1 + x_2 + y_2 \quad \textcircled{3}$$

- 比の計算を行いピボット要素を決定する
- ピボット変換を行う

$$\textcircled{1}-\textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} * 2$$

$$\textcircled{3}-\textcircled{2}$$

答え：

$x_1 = 2, x_2 = 2$  のとき、

最大値は10

# 標準形と正準形

## 最大問題

正準形：

- 目的関数  $z = x_1 + x_2 \rightarrow$  最大化
- 制約条件  $x_1 + 2x_2 \leq 3$   
 $0 \leq x_1 \leq 2$   
 $0 \leq x_2 \leq 1$

## 最小問題にする (対象問題)

標準形：

- 目的関数  $z = -x_1 - x_2 \rightarrow$  最小化
- 制約条件  $x_1 + 2x_2 + y_1 = 3$   
 $x_1 + y_2 = 2$   
 $x_2 + y_3 = 1$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$  スラック変数 (余裕を表す)

制約条件は非負条件以外はすべて等式にする

# 行列とベクトルによる問題の表現

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

目的関数  $c^T x \rightarrow$  最小化

制約条件  $Ax = b$

$x \geq 0$

最小問題にする (対象問題)

標準形:

- 目的関数  $z = -x_1 - x_2 \rightarrow$  最小化
- 制約条件 
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + y_1 &= 3 \\ x_1 + y_2 &= 2 \\ x_2 + y_3 &= 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

# 行列とベクトルによる問題の表現

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

最小問題にする (対象問題)

標準形:

- 目的関数  $z = -x_1 - x_2 \rightarrow$  最小化
- 制約条件 
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + y_1 &= 3 \\ x_1 + y_2 &= 2 \\ x_2 + y_3 &= 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

目的関数  $c^T x \rightarrow$  最小化  
制約条件  $Ax = b$   
 $x \geq 0$

①

T: 転置

$x \geq 0 \rightarrow x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

A: 係数行列

b: 右辺ベクトル

c: 費用ベクトル

$x$ : 変数ベクトル

$0$ :  $0$ ベクトル

行列とベクトルを定義すると、①は一般の線形計画問題を表す

# 基底行列

標準形：

$$x_1 + 2x_2 + y_1 = 3$$

$$x_1 + y_2 = 2$$

$$x_2 + y_3 = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**A:**  $x_1, x_2$  が非基底変数で、 $y_1, y_2, y_3$  が基底変数の時、

$$y_1 = 3 - x_1 + 2x_2$$

$$y_2 = 2 - x_1$$

$$y_3 = 1 - x_2$$

$$z = -x_1 - x_2$$

基底行列Bと非基底行列N（係数行列Aから）：

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 基底行列

## 標準形 (制約条件)

$$x_1 + 2x_2 + y_1 = 3$$

$$x_1 + y_2 = 2$$

$$x_2 + y_3 = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**B:**  $x_2, y_2$  が非基底変数、 $x_1, y_1, y_3$  が基底変数の時、

$$y_1 = 3 - x_1 - 2x_2 = 1 - 2x_2 + y_2$$

$$x_1 = 2 - y_2$$

$$y_3 = 1 - x_2$$

$$z = -(2 - y_2) - x_2 = -2 - x_2 + y_2$$

基底行列Bと非基底行列N (係数行列Aから) :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# 基底行列

## 標準形 (制約条件)

$$x_1 + 2x_2 + y_1 = 3$$

$$x_1 + y_2 = 2$$

$$x_2 + y_3 = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**C:**  $y_1, y_2$  が非基底変数,  $x_1, x_2, y_3$  が基底変数の時、

$$x_1 = 2 - y_2$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(3 - x_1 - y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1 + y_2)$$

$$y_3 = 1 - x_2 = \frac{1}{2}(1 + y_1 - y_2)$$

$$z = -(2 - y_2) - \frac{1}{2}(1 - y_1 + y_2) = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$$

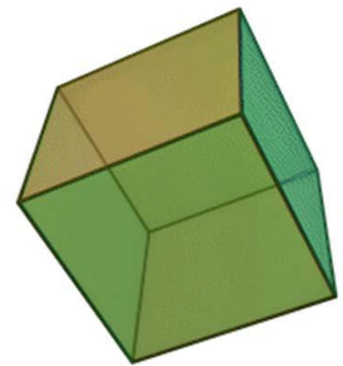
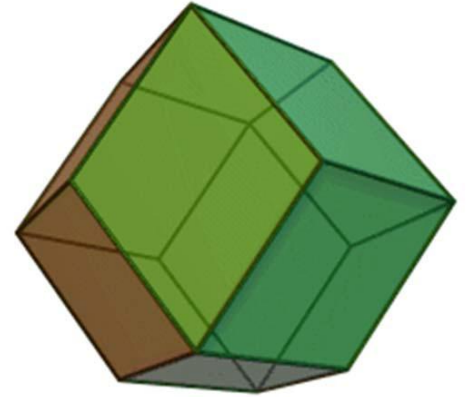
基底行列Bと非基底行列N (係数行列Aから) :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3つの基底行列Bと非基底行列Nは異なるが、  
問題を変形して、外観の違いだけ  
本来の問題は等価である

# 実行可能領域と最適解の性質

- 一般の $n$ 変数の線形計画問題の場合
  - 実行可能領域は、 $n$ 次元実数空間における凸多面体
  - 凸多面体の頂点の中に、必ず最適解が存在
- 最適解を見つけるには、実行可能領域の頂点を全て調べればよい
- 単純なやり方で頂点を調べると、指数時間が必要
  - 超立方体の場合、頂点の数は $2^n$ 個
- 効率的に頂点を調べて最適解を見つける方法
  - シンプレックス法（単体法）



# 実行可能と実行不可能

- 定義：不等式標準形のLP（線形計画問題）に対して
  - **実行可能** ⇔ 実行可能解が存在する
  - **実行不可能** ⇔ 実行可能解が存在しない

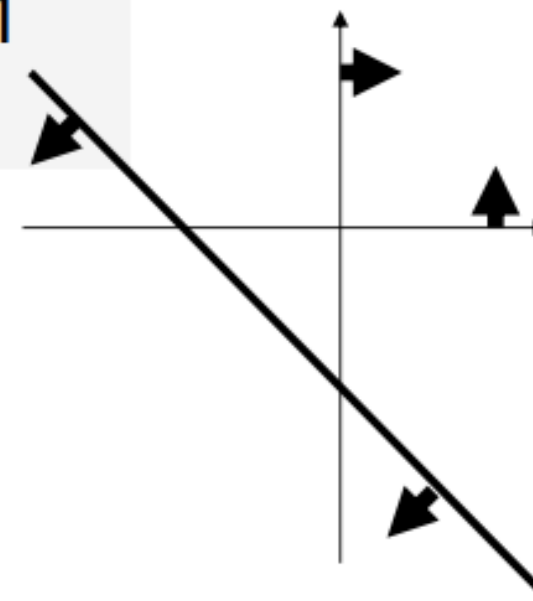
$$\begin{array}{l} \text{最小化 } x + 2y \\ \text{条件 } -x - y \geq -3 \\ \quad \quad x, y \geq 0 \end{array}$$

**実行可能**

(1,1)は実行可能解

$$\begin{array}{l} \text{最小化 } x + 2y \\ \text{条件 } -x - y \geq 1 \\ \quad \quad x, y \geq 0 \end{array}$$

**実行不可能**



# 有界と非有界

## • 有界

- 制約条件を満たす**実行可能領域が有限の範囲に収まっている状態**
- 実行可能領域が有界かつ空でない場合、必ず最適解が存在する
- グラフ上で、**閉じた多角形**（または凸多面体）の**領域になる**

## • 非有界

- 目的関数の値が無限に大きく（または小さく）改善できる、つまり**最適解が有限の値として確定できない状態**
  - **シンプレックス法**において、基底変数を改善する際に**基底に入る変数が基底から出る条件を満たさない**場合に発生する
- 実行可能領域が**無限大でも**、目的関数とその**範囲内で有界**であれば**最適解は存在**する

# 有界

- **有界**：目的関数の値が**ある範囲を超えて増加**（または**減少**）しない  
**場合**

## 【例】

目的関数  $x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

制約条件  $x_1 + x_2 \leq 5$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- 変数の値には上限がある
- 目的関数値の上限（最大値）は10  $\rightarrow$  **有界**  
( $x_1 = 0, x_2 = 5, z = 10$ )

# 非有界

- 非有界：目的関数の値を無限大に大きくできる場合

【例】

目的関数  $z = x_1 + x_2 \rightarrow \max$

制約条件  $x_1 - x_2 \geq 0$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$x_1 = x_2 = t$  とすると、 $z = 2t$  となる

→  $t$  を大きくすることで、目的関数値も無限に大きくなる

→ **非有界**

# 演習問題 1

- 次の線形計画問題を標準形に変換し、行列形式で表しなさい。  
また、初期基底行列と非基底行列も求めなさい。

目的関数  $2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

制約条件  $x_1 + x_2 \leq 4$

$$2x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# 演習問題2

- 次の線形計画問題が有界か非有界か判定しなさい。

目的関数  $z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

制約条件  $x_1 - x_2 \geq 0$

$$x_1, x_2 \geq 0$$