数理計画論

第3回目

- シンプレックス法

評価方法

- 中間試験　40%
- 期末課題　30%
- レポート　30% (2回～4回)

参考書

数理計画法-最適化の手法

一森哲男　著

共立出版株式会社

標準形と正準形

最大問題

正準形：

- 目的関数　$z = x_1 + x_2$ ➡　最大化
- 制約条件　$x_1 + 2x_2 \leq 3$

$$0 \leq x_1 \leq 2$$
$$0 \leq x_2 \leq 1$$

最小問題にする（**対象問題**）

標準形：

- 目的関数　$z = -x_1 - x_2$ ➡　最小化
- 制約条件

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + y_1 \qquad\qquad &= 3 \\ x_1 \qquad\quad + y_2 \quad &= 2 \\ x_2 \qquad\quad + y_3 &= 1 \end{aligned}$$

$x_1,\ x_2 \geq 0$

$y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$　スラック変数（余裕を表す）

制約条件は非負条件以外はすべて等式にする

基底形式

- 基底変数：全変数(5)から式の数(3)だけ選んだ変数
- 非基底変数：残りの変数（5-3=2）

基底変数：制約条件の連立方程式を解く際に選ばれる主要な変数

非基底変数：固定された変数

基底：基底変数の集合
非基底：非基底変数の集合

標準形：

$$x_1 + 2x_2 + y_1 = 3$$
$$x_1 + y_2 = 2$$
$$x_2 + y_3 = 1$$

$$z = -x_1 - x_2$$

$$x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$$

A: x_1, x_2 が非基底変数のとき（基底変数を非基底変数で表現）

$$y_1 = 3 - x_1 + 2x_2$$
$$y_2 = 2 - x_1$$
$$y_3 = 1 - x_2$$

$$z = -x_1 - x_2$$

基底形式

非基底変数(x_1, x_2)=0とする

A:

$$\boldsymbol{y_1 = 3 - x_1 + 2x_2}$$
$$\boldsymbol{y_2 = 2 - x_1}$$
$$\boldsymbol{y_3 = 1 - x_2}$$

$\boldsymbol{z = -x_1 - x_2}$ ➡**min**

zは非基底変数 x_1, x_2に関して解かれた形➡基底変数

zは常に基底変数

基底解

$$\boldsymbol{y_1 = 3}$$
$$\boldsymbol{y_2 = 2}$$
$$\boldsymbol{y_3 = 1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\boldsymbol{x_1 = 0}\\ \boldsymbol{x_2 = 0}\end{array}}$$

$$\underline{\boldsymbol{z = 0}}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

基底形式　（異なる非基底変数）

標準形（制約条件）

$x_1 + 2x_2 + y_1 = 3$

$x_1 + y_2 = 2$

$x_2 + y_3 = 1$

$z = -x_1 - x_2$

$x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$

B: x_2, y_2　が非基底変数のとき（基底変数を非基底変数で表現）

$y_1 = 3 - x_1 - 2x_2 = 1 - 2x_2 + y_2$

$x_1 = 2 - y_2$

$y_3 = 1 - x_2$

$z = -(2 - y_2) - x_2 = -2 - x_2 + y_2$

非基底変数($x_2,\ y_2$)=0とする

基底解

$y_1 = 1$

$x_1 = 2$

$y_3 = 1$

$x_2 = 0$

$y_2 = 0$

$\underline{z = -2}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

基底形式　（異なる非基底変数）

標準形（制約条件）

$$x_1 + 2x_2 + y_1 = 3$$
$$x_1 + y_2 = 2$$
$$x_2 + y_3 = 1$$

$$z = -x_1 - x_2$$

$$x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$$

C: y_1, y_2 が非基底変数のとき（基底変数を非基底変数で表現）

$$x_1 = 2 - y_2$$
$$x_2 = \frac{1}{2}(3 - x_1 - y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1 + y_2)$$
$$y_3 = 1 - x_2 = \frac{1}{2}(1 + y_1 - y_2)$$

$$z = -(2 - y_2) - \frac{1}{2}(1 - y_1 + y_2) = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$$

非基底変数($y_1,\ y_2$)=0とする

基底解

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = \frac{1}{2}$$
$$y_3 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_2 &= 0 \end{aligned}}$$

$$z = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

基底形式・基底解

- **基底形式**：各基底変数が非基底変数で表現された標準形
- 三つの基底形式の問題はその外観が異なるだけで、すべて対象問題と等価である
- **基底解**：非基底変数を０に固定した解
- 可能基底解：実行可能解
- 最適基底解：可能基底解が最適である➡最適基底解

- 対象問題の基底解をすべて列挙する：
    - ８つの基底解のうち、５つが可能基底解（非負条件満たす）

非負条件を満たす

基底解

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \bigcirc & & \bigcirc & & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} =
& \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},
& \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 0 \\ 2 \\ -1/2 \end{bmatrix},
& \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},
& \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},
& \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},
& \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix},
& \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},
& \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

基底解・最適基底解

- ５つの可能基底解の目的関数の値zは以下のようである

$z=-x_1-x_2$ の計算　0　-1　-2　-2.5　-2

可能基底解
（実行可能解）

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

最適解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

のとき $z=-2.5$

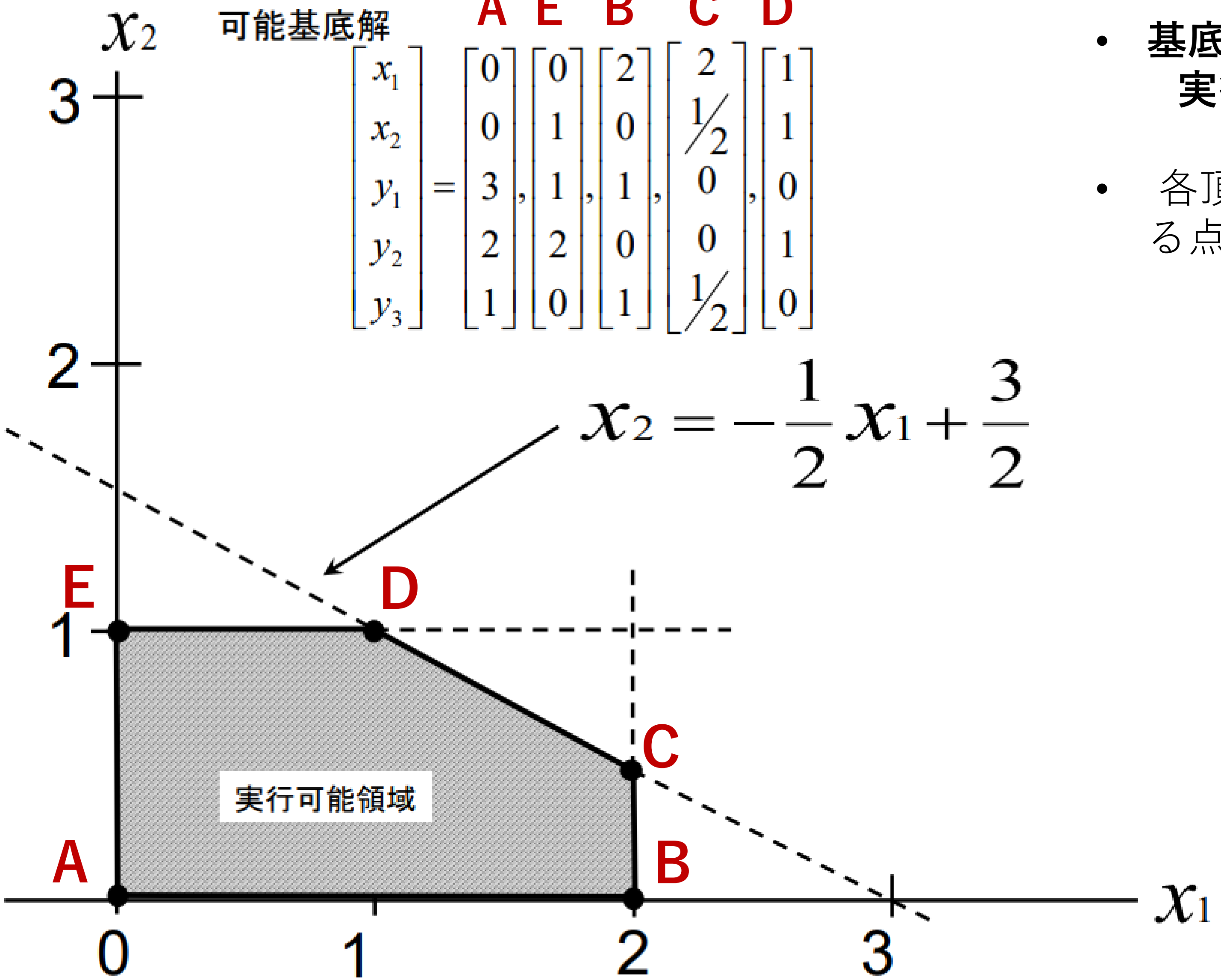
- 線形計画問題の最適解をみつけるには
  - 可能基底解をすべて列挙する
  - その中から目的関数を最小値にするものを見つけ出す

基底解（幾何学の解釈）

可能基底解

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \text{A} & & \text{E} & & \text{B} & & \text{C} & & \text{D} \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} & , & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} & , & \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & , & \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} & , & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

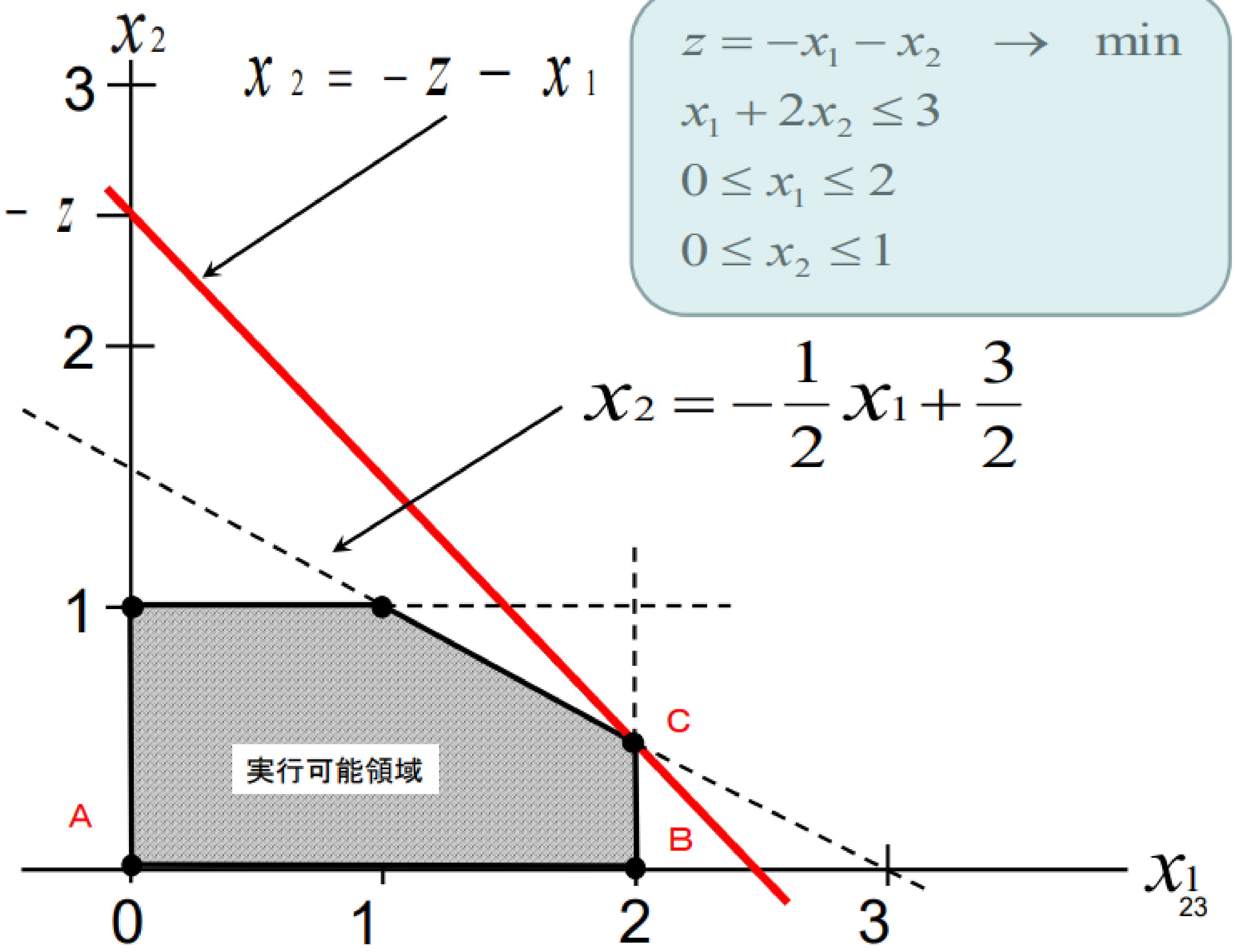
$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}$$



- **基底解**（幾何学的には）
  実行可能領域の頂点

- 各頂点は、制約式がちょうど等号で交わる点

最適基底解（幾何学の解釈）



$$z = -x_1 - x_2 \quad \rightarrow \quad \min$$
$$x_1 + 2x_2 \le 3$$
$$0 \le x_1 \le 2$$
$$0 \le x_2 \le 1$$

基底解 ＝ 頂点
最適基底解 ＝ 最適な頂点

基底解

- 変数は基底変数と非基底変数に二分される

- 基底変数は非基底変数で表される

- 非基底変数の値を定めると、基底変数の値が自動的に定める

➡非基底変数を０に固定すればよい

- 基底解：非基底変数を0に固定した解

- 可能基底解：実行可能解

- 最適基底解：可能基底解が最適である

➡最適基底解

基底解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 0 \\ 2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可能基底解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

最適基底解

$$, \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$

基底解

- 線形計画問題の最適化を見つけるには、**可能基底解をすべて列挙**
- その中から目的関数を最小（最大）にするものを見つけ出す
- しかし、基底解はnCm個も存在する（nは変数の個数、mは非基底変数の個数）
- すべての基底解をみつけるのはあまり得策ではない
- 可能基底解の一部分のみを見つけて最適解にたどりつく方法を考えてみよう

シンプレックス法

シンプレックス表

A: x_1, x_2 が非基底変数のとき

A:
$$z = -x_1 - x_2 \quad ①$$
$$y_1 = 3 - x_1 - 2x_2 \quad ②$$
$$y_2 = 2 - x_1 \quad ③$$
$$y_3 = 1 - x_2 \quad ④$$

A':
$$0 = z + x_1 + x_2 + 0 + 0 + 0$$
$$3 = x_1 + 2x_2 + y_1 + 0 + 0$$
$$2 = x_1 + 0 + 0 + y_2 + 0$$
$$1 = 0 + x_2 + 0 + 0 + y_3$$

- 等式の変数をすべて右辺に移項

表1.1

基底変数	その値	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
z	0	1	1	0	0	0	①
y_1	3	1	2	1	0	0	②
y_2	2	①	0	0	1	0	③
y_3	1	0	1	0	0	1	④

（a）

- A'の係数及び左辺の数値を書いた表
➡シンプレックス表

- 基底変数 z に対応する列が書かれていない
➡ z が決して非基底変数にならない

シンプレックス表

B: x_2, y_2　が非基底変数のとき

B:

$$z = -2 - x_2 + y_2$$
$$y_1 = 1 - 2x_2 + y_2$$
$$x_1 = 2 - y_2$$
$$y_3 = 1 - x_2$$

⇒

$$-2 = z + 0 + x_2 + 0 - y_2 + 0 \quad ①'$$
$$1 = 0 + 2x_2 + y_1 - y_2 + 0 \quad ②'$$
$$2 = x_1 + 0 + 0 + y_2 + 0 \quad ③'$$
$$1 = 0 + x_2 + 0 + 0 + y_3 \quad ④'$$

基底変数	その値	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
z	−2	0	1	0	−1	0	①'=① - ③
y_1	1	0	2	1	−1	0	②'=② - ③
x_1	2	1	0	0	1	0	③'=③
y_3	1	0	1	0	0	1	④'=④

（b）

$$z = -x_1 - x_2 \quad ①$$
$$y_1 = 3 - x_1 - 2x_2 \quad ②$$
$$y_2 = 2 - x_1 \quad ③$$
$$y_3 = 1 - x_2 \quad ④$$

シンプレックス表

C: y_1, y_2 が非基底変数のとき

C:

$$z = -2.5 + 0.5y_1 + 0.5y_2$$
$$x_2 = 0.5 - 0.5y_1 + 0.5y_2$$
$$x_1 = 2 - y_2$$
$$y_3 = 0.5 + 0.5y_1 - 0.5y_2$$

$\Rightarrow$

$$-2.5 = z + 0 + 0 - 0.5y_1 - 0.5y_2 + 0$$
$$0.5 = 0 + 1 + 0.5y_1 - 0.5y_2 + 0$$
$$2 = x_1 + 0 + 0 + y_2 + 0$$
$$0.5 = 0 + 0 - 0.5y_1 + 0.5y_2 + y_3$$

基底変数	その値	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
z	$-\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	①"=①' - ②'× $\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	②"=②'× $\frac{1}{2}$
x_1	2	1	0	0	1	0	③"=③'
y_3	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	④"=④' - ②'× $\frac{1}{2}$

（c）

$$-2 = z + 0 + x_2 + 0 - y_2 + 0 \quad ①'$$
$$1 = 0 + 2x_2 + y_1 - y_2 + 0 \quad ②'$$
$$2 = x_1 + 0 + 0 + y_2 + 0 \quad ③'$$
$$1 = 0 + x_2 + 0 + 0 + y_3 \quad ④'$$

シンプレックス法

- 表1.1(a)～(c) はすべて等価である

シンプレックス表の表す基底解が可能解として、z行の係数の中に正のものが存在しなくなれば、その時の基底解が最適基底解になる

表1.1

基底変数	その値	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
z	0	1	1	0	0	0	①
y_1	3	1	2	1	0	0	②
y_2	2	①	0	0	1	0	③
y_3	1	0	1	0	0	1	④

（a）

基底変数	その値	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
z	−2	0	1	0	−1	0
y_1	1	0	②	1	−1	0
x_1	2	1	0	0	1	0
y_3	1	0	1	0	0	1

（b）

基底変数	その値	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
z	$-\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
x_2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
x_1	2	1	0	0	1	0
y_3	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

（c）

変数x_1に対応するベクトル

(a) $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ (単位ベクトル)

変数x_2に対応するベクトル

(b) $\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ (単位ベクトル)

- 表1.1丸印の付いた数値をピボット要素
- 単位ベクトルの成分１を持つ位置に対応
- (a)から(b)へ　(b)から(c)へ
  シンプレックス表の変換手続きを
ピボット演算(ピボット変換)

- ピボット要素とは，基底を入れ替えるための中心となる数値
- 今の解から、より良い解へ移動するための“回転軸”の役割

シンプレックス法

表1.1

基底変数	その値	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
z	0	1	1	0	0	0	①
y_1	3	1	2	1	0	0	②
y_2	2	1	0	0	1	0	③
y_3	1	0	1	0	0	1	④

（a）

ピボット列

ピボット要素

ピボット行

比の計算

$3 \div 1 = 3$

$2 \div 1 = 2$

$1 \div 0 = \infty$

A: $z = -x_1 - x_2$

$y_1 = 3 - x_1 - 2x_2$

$y_2 = 2 - x_1$

$y_3 = 1 - x_2$

$\boxed{x_2 = 0}$

$z = -x_1$

$y_1 = 3 - x_1$

$y_2 = 2 - x_1$

$y_3 = 1$

- **目的関数zは制約条件として**
  $\boldsymbol{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0}$
- **最小化するために、$\boldsymbol{x_1}$, または$\boldsymbol{x_2}$の値を大きくする**
- **どこまで最小？**
- $\boldsymbol{x_2 = 0}$, $\boldsymbol{x_1}$のみ**0**から増加させる

$x_2 = 0$ として x_1 を大きくすると z は小さくなる.

その限界は $\min\left\{\frac{3}{1}, \frac{2}{1}, \infty\right\} = 2$

- $\boldsymbol{y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0}$

$\boldsymbol{y_1 = 3 - x_1 \geq 0}$

$\boldsymbol{y_2 = 2 - x_1 \geq 0}$

$\boldsymbol{y_3 = 1 \geq 0}$

表1.1

基底変数	その値	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		比の計算
z	0	1	1	0	0	0	①	
y_1	3	1	2	1	0	0	②	$3 \div 1 = 3$
y_2	2	1	0	0	1	0	③	$2 \div 1 = 2$
y_3	1	0	1	0	0	1	④	$1 \div 0 = \infty$

（a）

ピボット列

ピボット要素

ピボット行

基底変数	その値	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		
z	−2	0	1	0	−1	0	①'=① - ③	
y_1	1	0	2	1	−1	0	②'=② - ③	$1 \div 2 = 0.5$
x_1	2	1	0	0	1	0	③'=③	$2 \div 0 = \infty$
y_3	1	0	1	0	0	1	④'=④	$1 \div 1 = 1$

（b）

ピボット変換

基底変数	その値	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
z	$-\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	①''=①' - ②' × $\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	②''=②' × $\frac{1}{2}$
x_1	2	1	0	0	1	0	③''=③'
y_3	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	④''=④' - ②' × $\frac{1}{2}$

（c）

ピボット変換

すべてが負
または0で
終了

B: $z = -2 - x_2 + y_2$
$y_1 = 1 - 2x_2 + y_2$
$x_1 = 2 - y_2$
$y_3 = 1 - x_2$

$x_1 = 0$, x_2のみ増加させ、目的関数zは小さくなる

- $x_1 = y_2 = 0$

$$y_1 = 1 - 2x_2 \geq 0$$
$$x_2 = 2 \geq 0$$
$$y_3 = 1 - x_2 \geq 0$$

$$\min\left\{\frac{1}{2},\ \infty,\ \frac{1}{1}\right\} = \frac{1}{2}$$

$x_1 = 0$として、x_2を大きくすると,zは小さくなる
その限界、$\min\left\{\frac{1}{2},\ \infty,\ \frac{1}{1}\right\} = \frac{1}{2}$

表1.1

ピボット列

ピボット要素

ピボット行

比の計算

基底変数	その値	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		比の計算
z	0	1	1	0	0	0	①	
y_1	3	1	2	1	0	0	②	$3 \div 1 = 3$
y_2	2	1	0	0	1	0	③	$2 \div 1 = 2$
y_3	1	0	1	0	0	1	④	$1 \div 0 = \infty$

（a）

ピボット変換

基底変数	その値	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		
z	−2	0	1	0	−1	0	①'=① - ③	
y_1	1	0	2	1	−1	0	②'=② - ③	$1 \div 2 = 0.5$
x_1	2	1	0	0	1	0	③'=③	$2 \div 0 = \infty$
y_3	1	0	1	0	0	1	④'=④	$1 \div 1 = 1$

（b）

ピボット変換

基底変数	その値	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
z	$-\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	①"=①' - ②' × $\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	②"=②' × $\frac{1}{2}$
x_1	2	1	0	0	1	0	③"=③'
y_3	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	④"=④' - ②' × $\frac{1}{2}$

（c）

(b) $y_1 = 1 - 2x_2 \geq 0$

$$x_2 = 2 \geq 0$$

$$y_3 = 1 - x_2 \geq 0$$

$$x_2 = \frac{1}{2}, \qquad y_1 = 0$$

非基底変数：y_1, y_2

$$z = -2.5 + 0.5y_1 + 0.5y_2$$
$$x_2 = 0.5 - 0.5y_1 + 0.5y_2$$
$$x_1 = 2 - y_2$$
$$y_3 = 0.5 + 0.5y_1 - 0.5y_2$$

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y_1 \geq 0$$
$$x_1 = 2 \geq 0$$
$$y_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_1 \geq 0$$
$$\min\left\{\frac{1}{1}, \quad \infty, \quad 0\right\} = -2.5$$

$y_2 = 0$として、y_1を大きくすると,zは小さくなる

$y_1 = 0$として、y_2を大きくすると同様

答えの書き方に注意

基底変数	その値	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
z	$-\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
x_2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
x_1	2	1	0	0	1	0
y_3	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

すべてが負
または0で
終了

$x_1 = 2, \qquad x_2 = 0.5$ のとき、
最大値　$z = 5/2$

シンプレックス法

- シンプレックス表を改訂しながら最適解を求める方法
- ピボット列の選び方：
  - z行の係数中で正のものがあれば、その一つを選ぶ
- ピボット行の選び方：
  - 上で選んだ列の正の係数で、各行の基底解の値を割る
  - 最小値を与える行を一つ選ぶ
- ピボット列を選ぶ際に、一般にはもっとも大きい正の係数を持つ列を選ぶのが得策である
- ピボット行の選び方の中の計算は比の計算である

【シンプレックス法の例】

- 正準形の線形計画問題をシンプレックス法で解いてみる

目的関数　$2x_1 + 3x_2$ ➡ max

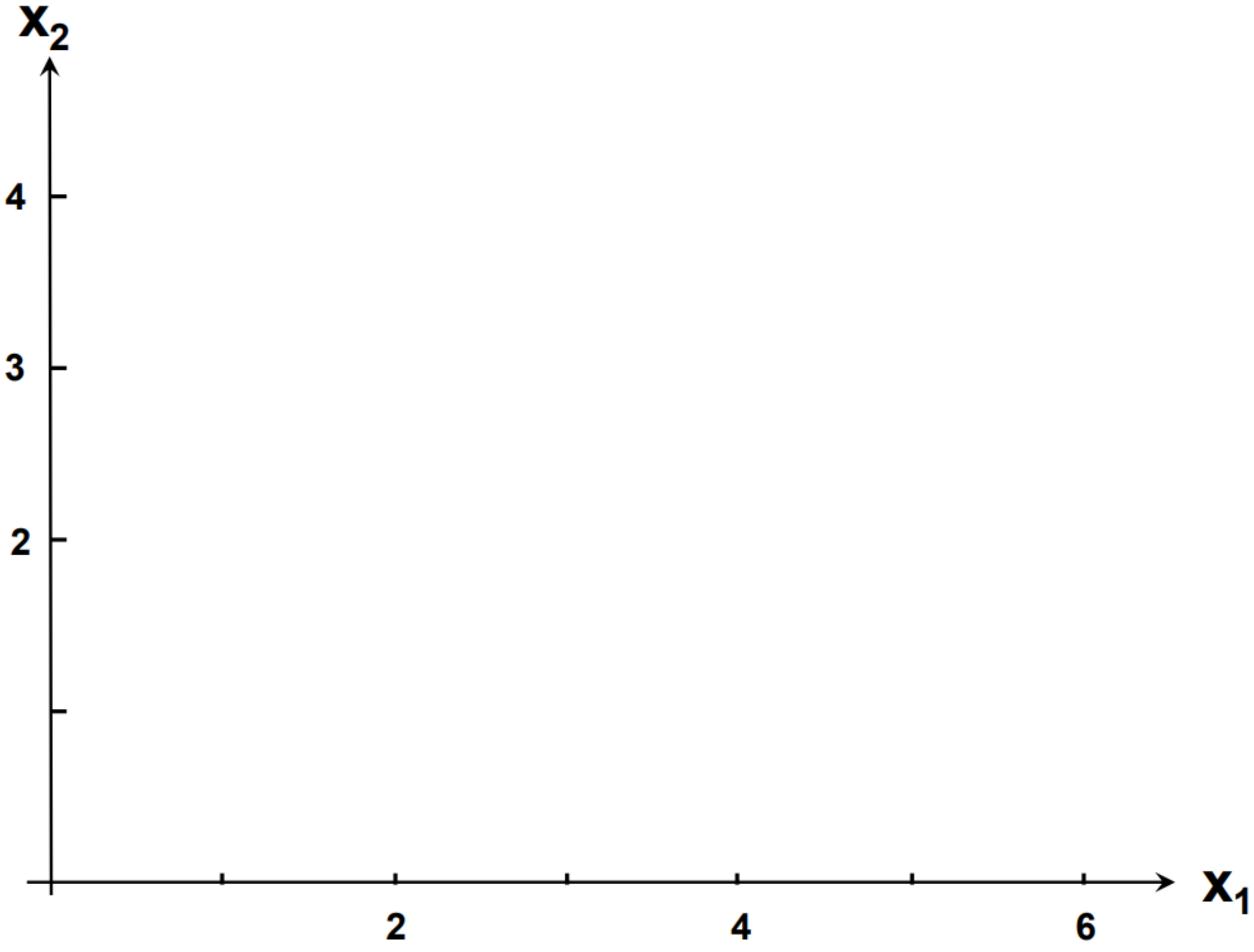
制約条件　$x_1 + x_2 \leq 4$

$0.5x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

【シンプレックス法の例】

（1）$x_1 - x_2$平面上で実行可能領域を図示する



正準形

$$2x_1 + 3x_2 \quad \rightarrow \quad \max$$

$$(z = -2x_1 - 3x_2 \quad \rightarrow \quad \min)$$

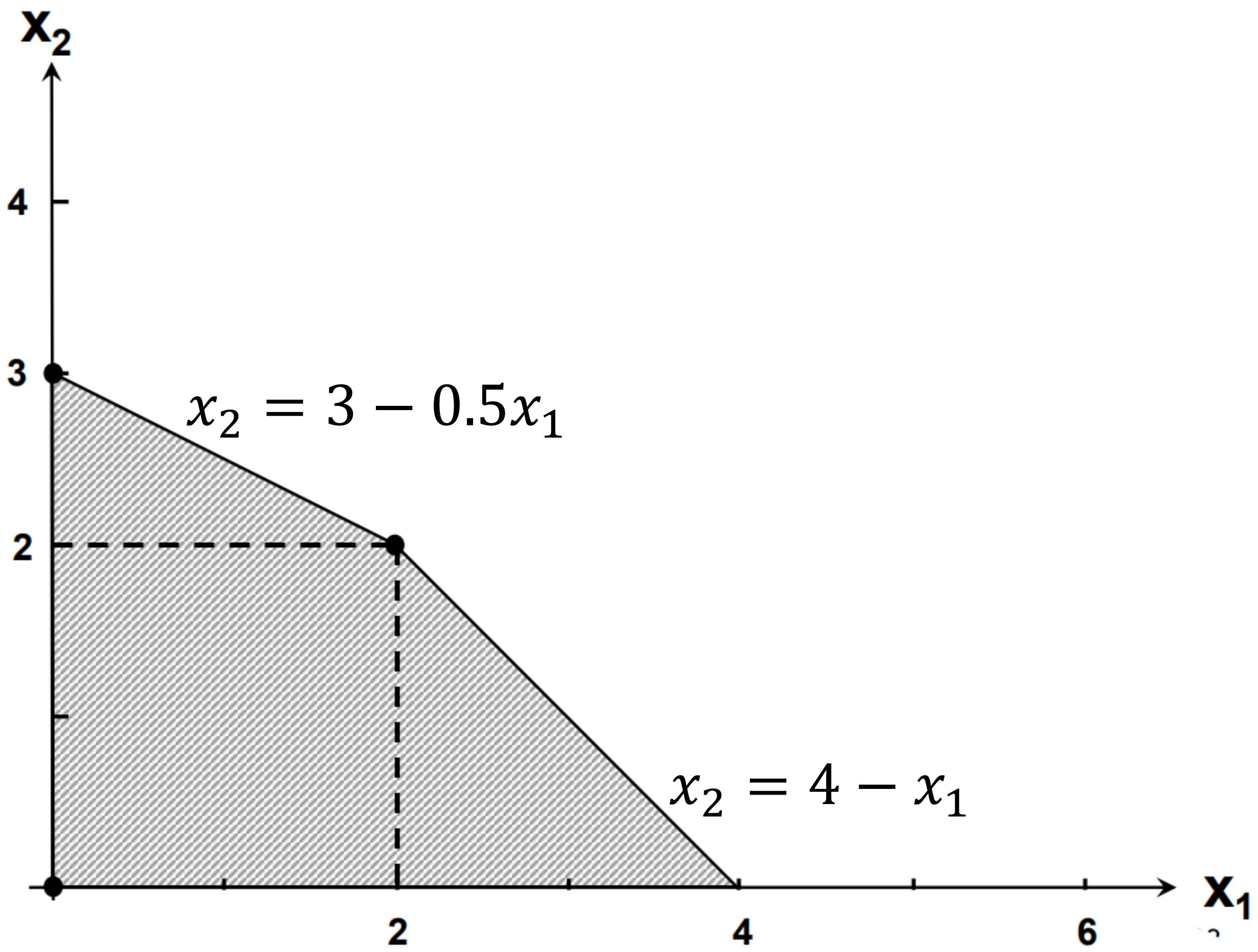
$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$0.5x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

【シンプレックス法の例】

（１）$x_1 - x_2$平面上で実行可能領域を図示する



正準形

$$2x_1 + 3x_2 \quad \rightarrow \quad \max$$

$$(z = -2x_1 - 3x_2 \quad \rightarrow \quad \min)$$

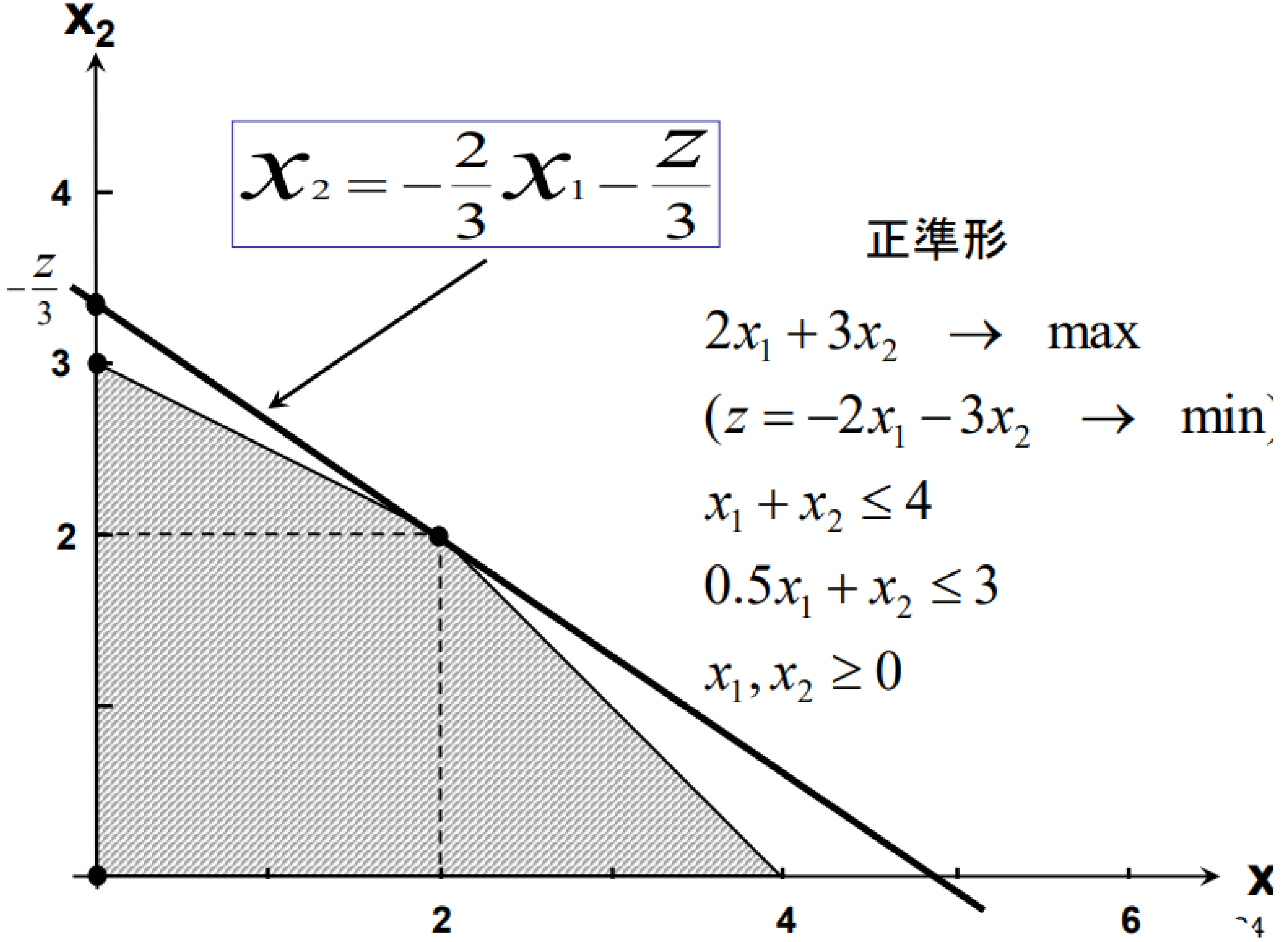
$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$0.5x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

【シンプレックス法の例】

（１）$x_1 - x_2$平面上で実行可能領域を図示する



正準形

$$2x_1 + 3x_2 \quad \rightarrow \quad \max$$

$$(z = -2x_1 - 3x_2 \quad \rightarrow \quad \min)$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$0.5x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

【シンプレックス法の例】

（2）**標準形を求める**

- 正準形の線形計画問題をシンプレックス法で解いてみる

目的関数　$2x_1 + 3x_2$　➡　max

制約条件　$x_1 + x_2 \leq 4$

$0.5x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

- 標準形の最小化問題に直す

$z = -2x_1 - 3x_2$　➡　min

$x_1 + x_2 + y_1 = 4$

$0.5x_1 + x_2 + y_2 = 3$

$x_1, x_2, y_1, y_2, \geq 0$

【シンプレックス法の例】

（3）シンプレックス表を求める

基底変数	その他	x_1	x_2	y_1	y_2	比の計算
z	0	2	3	0	0	
y_1	4	1	1	1	0	
y_2	3	0.5	1	0	1	

$$0 = \mathrm{z} + 2x_1 + 3x_2$$
$$4 = x_1 + x_2 + y_1$$
$$3 = 0.5x_1 + x_2 + y_2$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, \geq 0$$

- 標準形

$$\mathrm{z} = -2x_1 - 3x_2 \quad ➡ \quad \mathrm{min}$$
$$x_1 + x_2 + y_1 = 4$$
$$0.5x_1 + x_2 + y_2 = 3$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, \geq 0$$

【シンプレックス法の例】

- 標準形

$$z = -2x_1 - 3x_2 \quad \Rightarrow \quad \min$$
$$x_1 + x_2 + y_1 = 4$$
$$0.5x_1 + x_2 + y_2 = 3$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, \geq 0$$

（4）ピボット変換

基底変数	その他	x_1	x_2	y_1	y_2	比の計算
z	0	2	3	0	0	
y_1	4	1	1	1	0	4/1=4
y_2	3	0.5	1	0	1	3/1=3

$$0 = z + 2x_1 + 3x_2 \quad ①$$
$$4 = x_1 + x_2 + y_1 \quad ②$$
$$3 = 0.5x_1 + x_2 + y_2 \quad ③$$

基底変数	その他	x_1	x_2	y_1	y_2	
z	-9	0.5	0	0	-3	
y_1	1	0.5	0	1	-1	
x_2	3	0.5	1	0	1	

①－3*③

②－③

【シンプレックス法の例】

（4）**ピボット変換**

- 標準形

$z = -2x_1 - 3x_2$ ➡ min

$x_1 + x_2 + y_1 = 4$

$0.5x_1 + x_2 + y_2 = 3$

$x_1, x_2, y_1, y_2, \geq 0$

基底変数	その他	x_1	x_2	y_1	y_2	比の計算
z	-9	0.5	0	0	-3	
y_1	1	0.5	0	1	-1	1/0.5=2
x_2	3	0.5	1	0	1	3/0.5=6

$-9 = z + 0.5x_1 - 3\,y_2$ ①

$1 = 0.5x_1 + y_1 - y_2$ ②

$3 = 0.5x_1 + x_2 + y_2$ ③

⬇

基底変数	その他	x_1	x_2	y_1	y_2	比の計算
z	-10	0	0	-1	-2	
x_1	2	1	0	2	-2	
x_2	2	0	1	-1	2	

①-②

②* 2

③-②

答え：

$\boldsymbol{x_1 = 2, x_2 = 2}$ のとき、

最大値は10

演習問題

- 次の正準形の線形計画問題をシンプレックス法で解きなさい。

目的関数　$4x_1 + 3x_2$　➡　max

制約条件　$x_1 + 2x_2 \leq 2$

$12x_1 + 18x_2 \leq 19$

$6x_1 + 4x_2 \leq 7$

$x_1, x_2 \geq 0$