数理計画論

第3回目

- **線形計画法の考え方**

到達目標

- 計画問題として、線形計画法とネットワーク計画法、および非線形計画を学ぶ
- 自ら計画問題を定式化し、最適化手法によって最適解を導出する
- 線形計画法では、問題の定式化を行い、シンプレックス法によって最適解を求める
- 双対性とラグランジュ緩和の意味を学ぶ
- 非線形計画問題では、ラグランジュ法とクーン・タッカーの定理を理解し、具体的に最適化問題を解法できる能力を身につける

授業計画表

第1回	オリエンテーション・関数の最適化
第2回	計画問題の種類と概要
第3回	線形計画法の考え方
第4回	シンプレックス法
第5回	有界と非有界
第6回	２段階単体法
第7回	双対問題
第8回	相補性定理
第9回	中間試験
第10回	非線形最適化の基礎
第11回	最急降下法
第12回	緩和問題
第13回	Karush-Kuhn-Tucker 条件
第14回	組合せ最適化
第15回	まとめ・復習・総合演習問題

評価方法

- 演習課題　30%
- 中間試験　　40%
- 期末総合課題　30%

により成績を評価する

参考書

数理計画法-最適化の手法

一森哲男　著

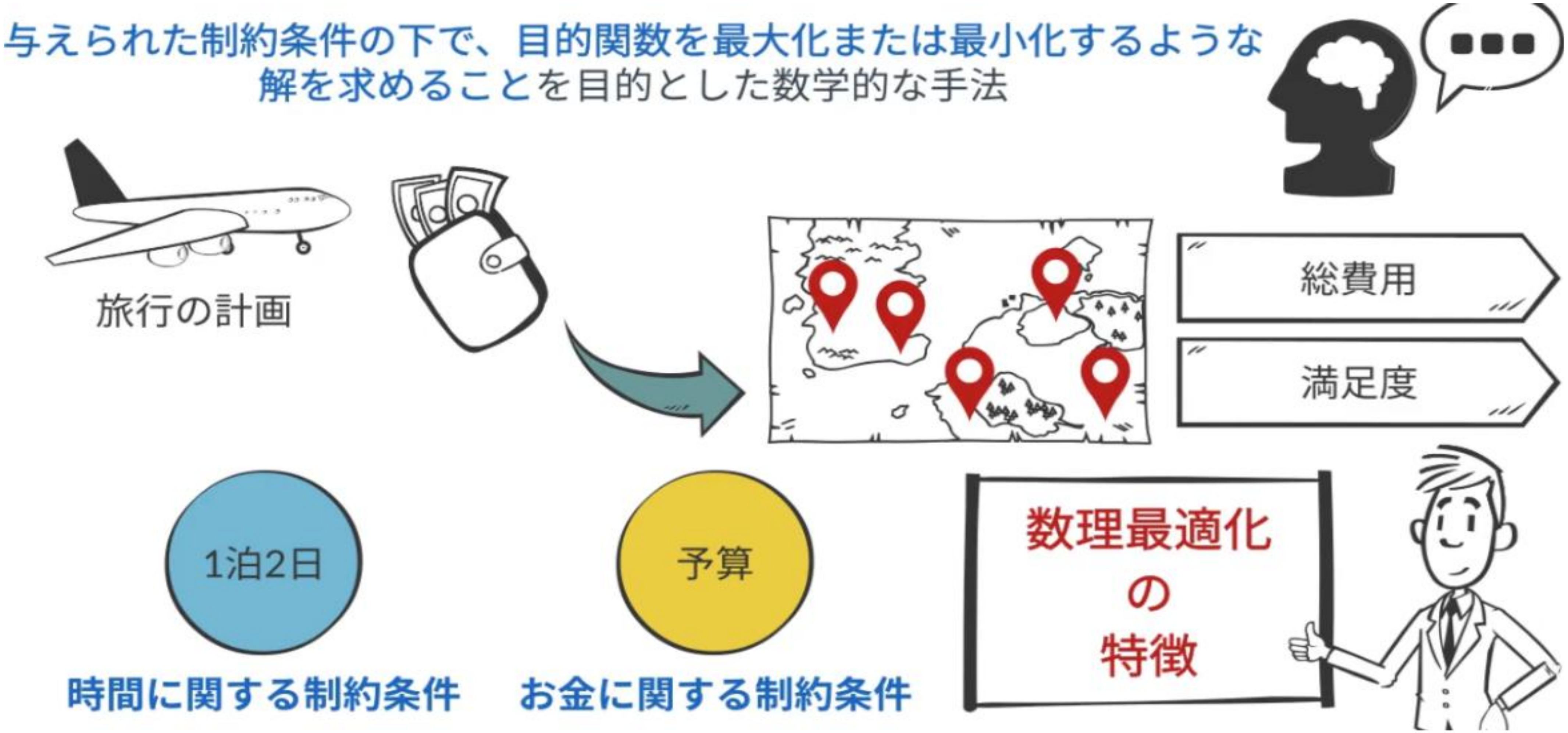
共立出版株式会社

数理計画法による最適化(数理最適化)

- 最適とは、ある特定の目的、条件、状況において、**最も適している**、または**最高の状態**を指す
  - ビジネスでは制約条件の中で成果を最大化する「最適解」や、組織全体での効率化を指す「全体最適」の文脈でよく使われる

- **最適化**（Optimization）とは、与えられた**制約条件**（予算、時間、資源など）の下で、**特定の目的**（コスト最小化、利益最大化、効率向上など）を最大限に達成する「**最良の解**」を見つけ出す**プロセスや手法**
  - 数学、工学、ビジネスなど様々な分野で、無駄を減らし効率を最大化するために用いられる

数理計画法による最適化(数理最適化)



引用：https://www.youtube.com/watch?v=Sk-5PGtxN9M

【演習問題（線形計画問題の定式化）】

- ２種類の容器A,Bを作るのに２台の機械M_1, M_2を使う。容器Aを１個作るのに機械M_1を２分、 M_2を４分使う必要がある。一方、容器Bを１個作るのにM_1を８分、機械 M_2を４分使う必要がある。容器A,Bを作る利益は一つあたりそれぞれ30円、45円である。容器A,Bの1時間あたりの製造量をそれぞれx, y個とするとき、利益を最大にするにはどのような計画すればよいか？

演習問題（線形計画問題の定式化）　解答】

- 変数の定義　容器Aの製造量：x
  容器Bの製造量：y

- 目的関数 $z = 30x + 45y$ ➡ 最大　（全体の利益）

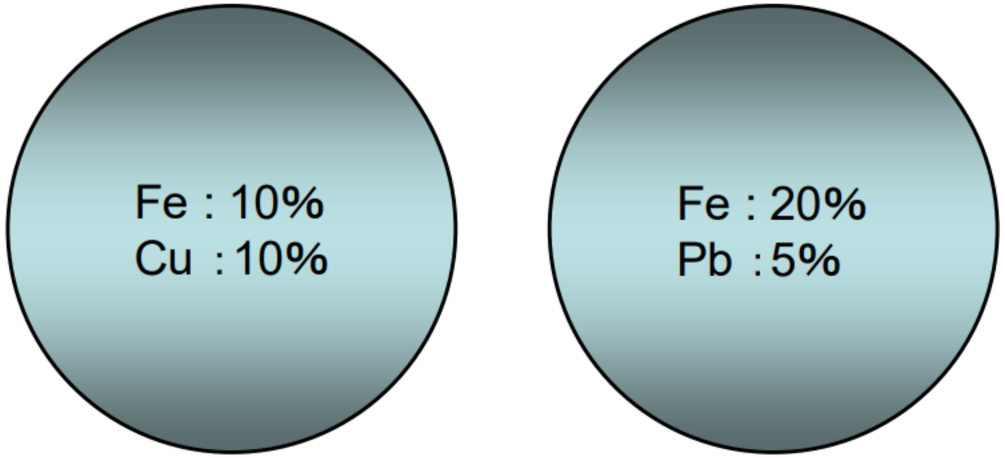
- 制約条件
  $2x + 8y \leq 60$　（機械M_1を使用する時間合計）
  $4x + 4y \leq 60$　（機械M_2を使用する時間合計）
  $x \geq 0,\ \ y \geq 0$

制約条件
$$x + 4y \leq 30$$
$$x + y \leq 15$$
$$x \geq 0,\ \ y \geq 0$$

線形計画問題（モデル化）

- ２種類の鉱石が手に入る

鉱石１　　鉱石２



２万円/１単位　　1万円/１単位

- 1日当たり
  - Feが0.8単位
  - Cuが0.2単位
  - Pbが0.05単位

必要

- それぞれの鉱石を何単位購入？

線形計画法（定式化）

- 変数の定義　鉱石１：x_1 単位　鉱石２：x_2 単位
- 目的関数　$z = 2x_1 + x_2$ ➡　最小化　（全体の購入費）
- 制約条件

$0.1x_1 + 0.2x_2 \geq 0.8$	（Feの必要量）
$0.1x_1 \geq 0.2$	（Cuの必要量）
$0.05x_2 \geq 0.05$	（Pbの必要量）

- **制約条件**

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\geq 8 \\
x_1 &\geq 2 \\
x_2 &\geq 1
\end{aligned}
$$

目的関数（有効性関数）：最小化すべき式
制約条件（制約）：制約式の群
線形計画問題：１次式で表された目的関数を最大化もしくは最小化する問題

線形計画法（定式化・モデリング）【例】

- 変数の定義　鉱石１：x_1 単位　鉱石２： x_2 単位
- 目的関数　$z = 2x_1 + x_2$ ➡　最小化　　　（全体の購入費）
- 制約条件　$x_1 + 2x_2 \geq 8$　　（Feの必要量）

　　$x_1 \geq 2$　　（Cuの必要量）

　　$x_2 \geq 1$　　（Pbの必要量）

【例】

$(x_1, x_2) = (6, 1)$　$z = 13$万円　$(x_1 + 2x_2 = 8 \geq 8)$　可能解

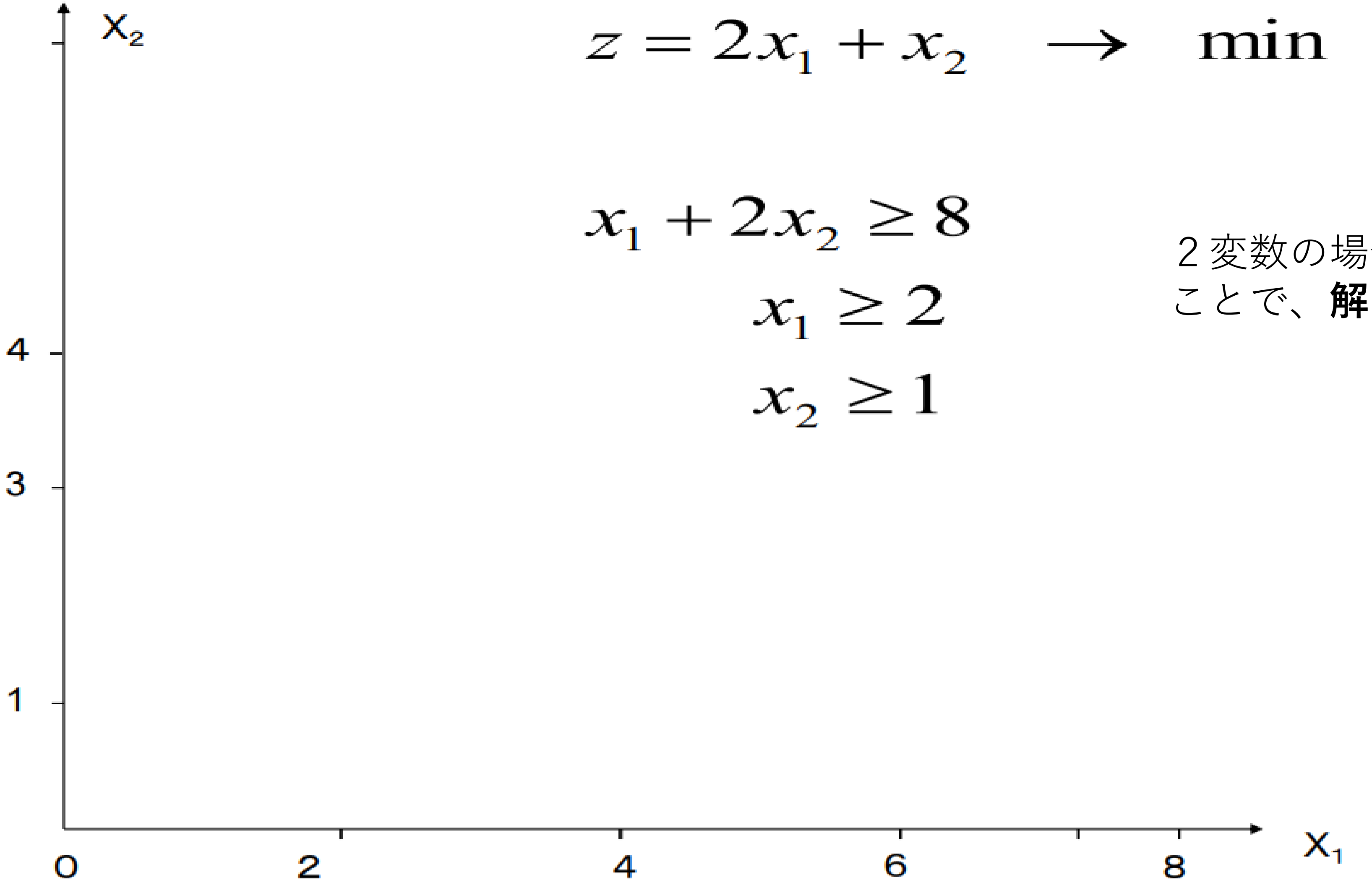
$(x_1, x_2) = (2, 3)$　$z = 7$万円　$(x_1 + 2x_2 = 8 \geq 8)$　可能解

$(x_1, x_2) = (2, 1)$　$z = 5$万円　$(x_1 + 2x_2 = 5 < 8)$　不能解

購入の仕方により購入費用が大幅にとこなる

- 実行可能解（可能解）：制約条件をすべて満足している解
- 実行不可能解（不能解）：制約条件の中に満足していないものがある
- 最適解：可能解の中で目的関数の値を最小にする解
（最大化問題では最大にする解）
- 最適目的関数値（最適値）：最適解により定まる目的関数の値

線形計画法の例（実行可能解）



$$z = 2x_1 + x_2 \quad \rightarrow \quad \min$$

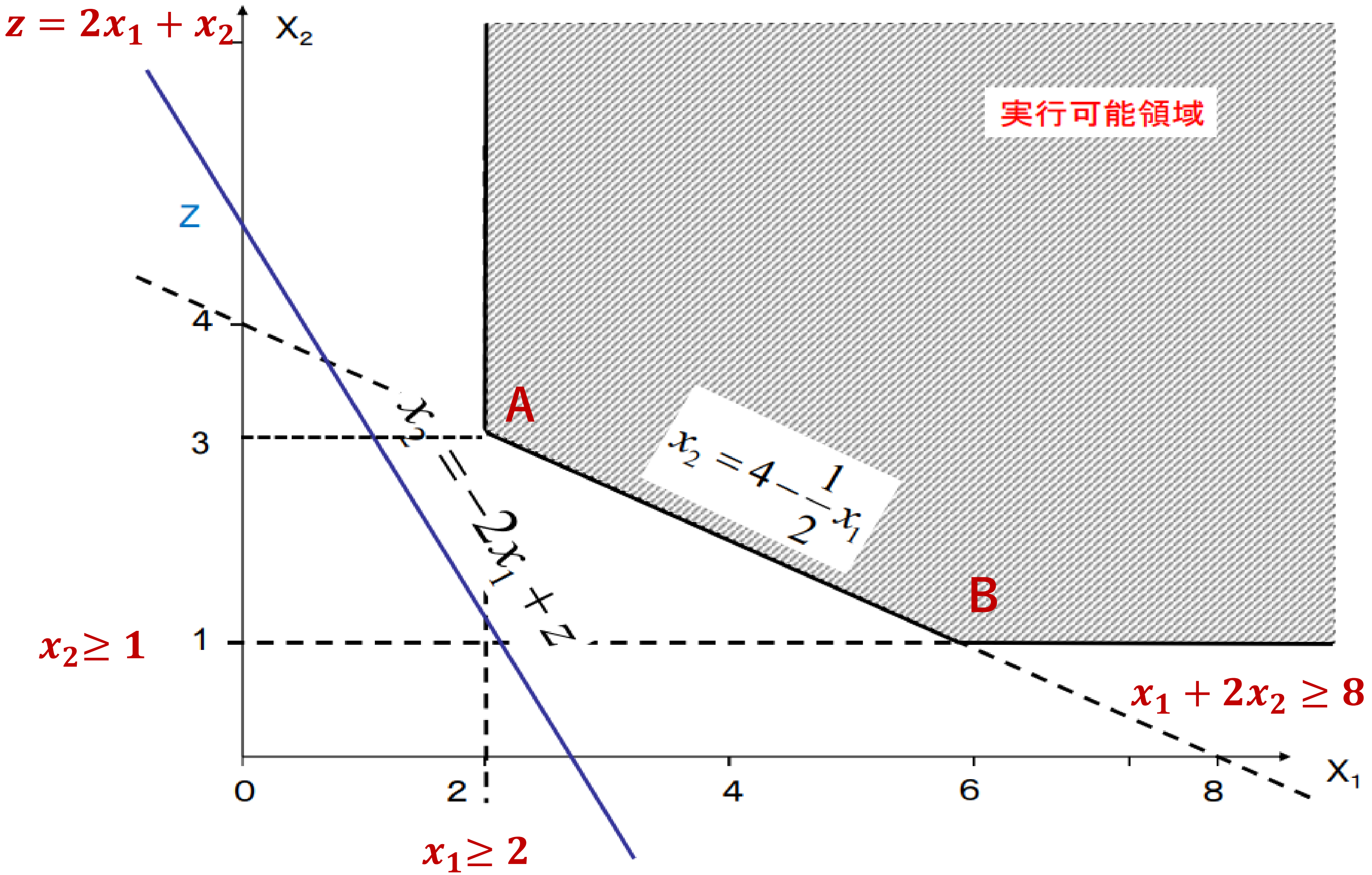
$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_2 \geq 1$$

２変数の場合、**領域を図式する**ことで、**解くこと**ができる

線形計画法の例（実行可能解）



- **実行可能領域**：すべての制約条件を満たす領域

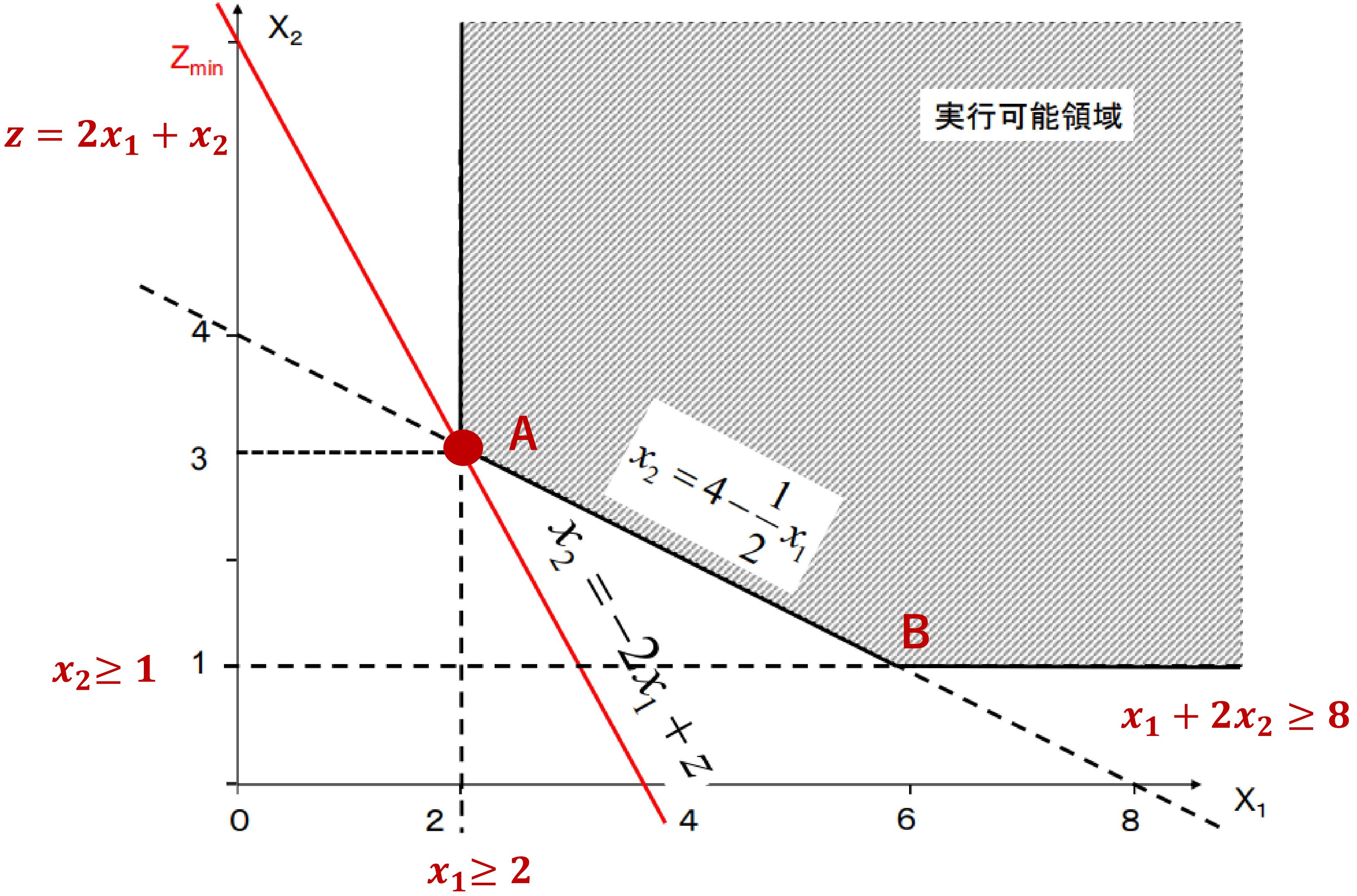
$$z = 2x_1 + x_2 \quad \rightarrow \quad \min$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_2 \geq 1$$

線形計画法の例（実行可能解）



$$z = 2x_1 + x_2 \quad \rightarrow \quad \min$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$
$$x_1 \geq 2$$
$$x_2 \geq 1$$

標準形と正準形

最大問題

正準形：

- 目的関数　$z = x_1 + x_2$ ➡　最大化
- 制約条件　$x_1 + 2x_2 \leq 3$

$$0 \leq x_1 \leq 2$$
$$0 \leq x_2 \leq 1$$

最小問題にする（**対象問題**）

標準形：

- 目的関数　$z = -x_1 - x_2$ ➡　最小化
- 制約条件

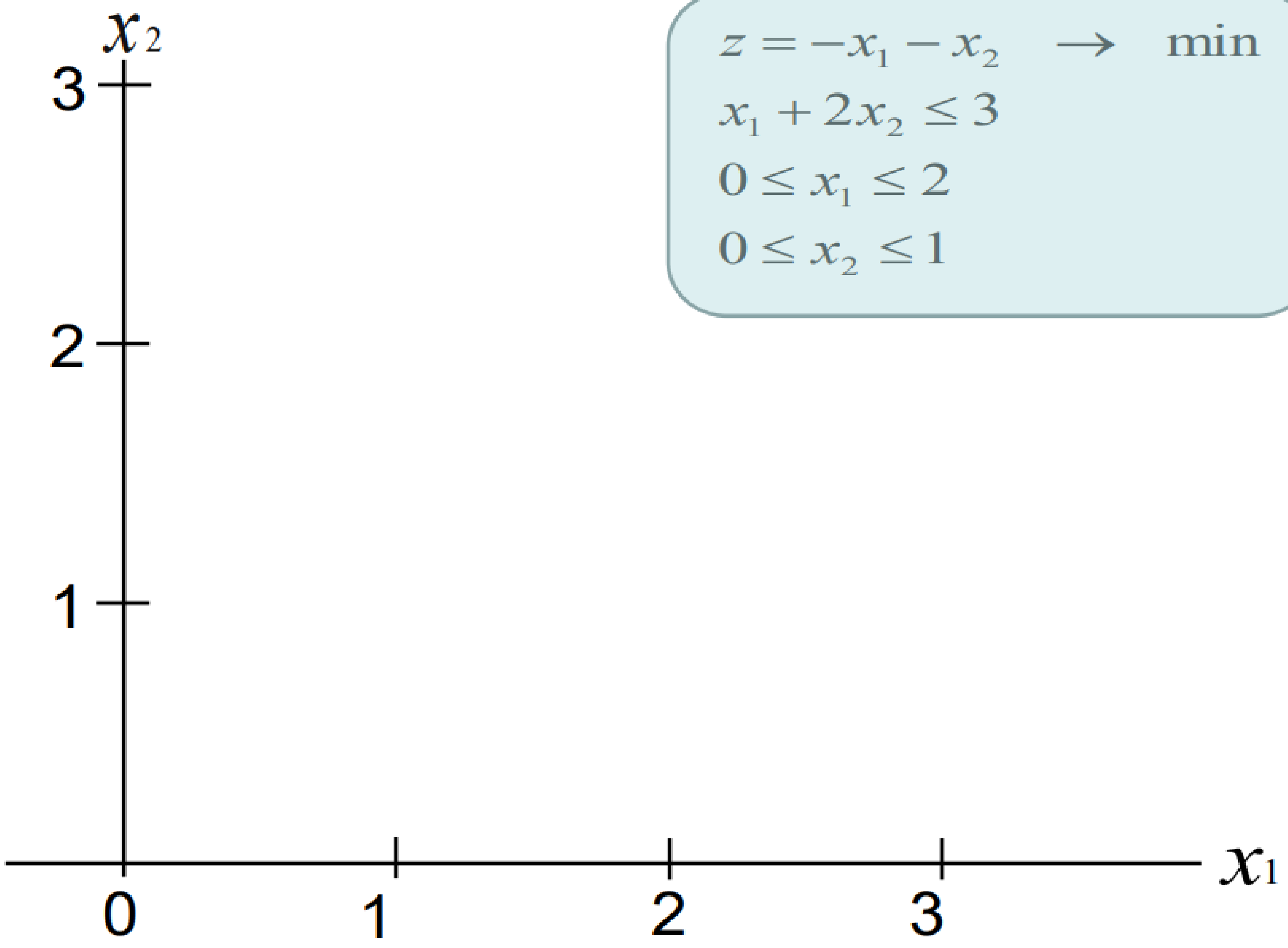
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + y_1 \qquad\qquad &= 3 \\ x_1 \qquad\quad + y_2 \quad &= 2 \\ x_2 \qquad\qquad + y_3 &= 1 \end{aligned}$$

$x_1,\ x_2 \geq 0$

$y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$　スラック変数（余裕を表す）

制約条件は非負条件以外はすべて等式にする

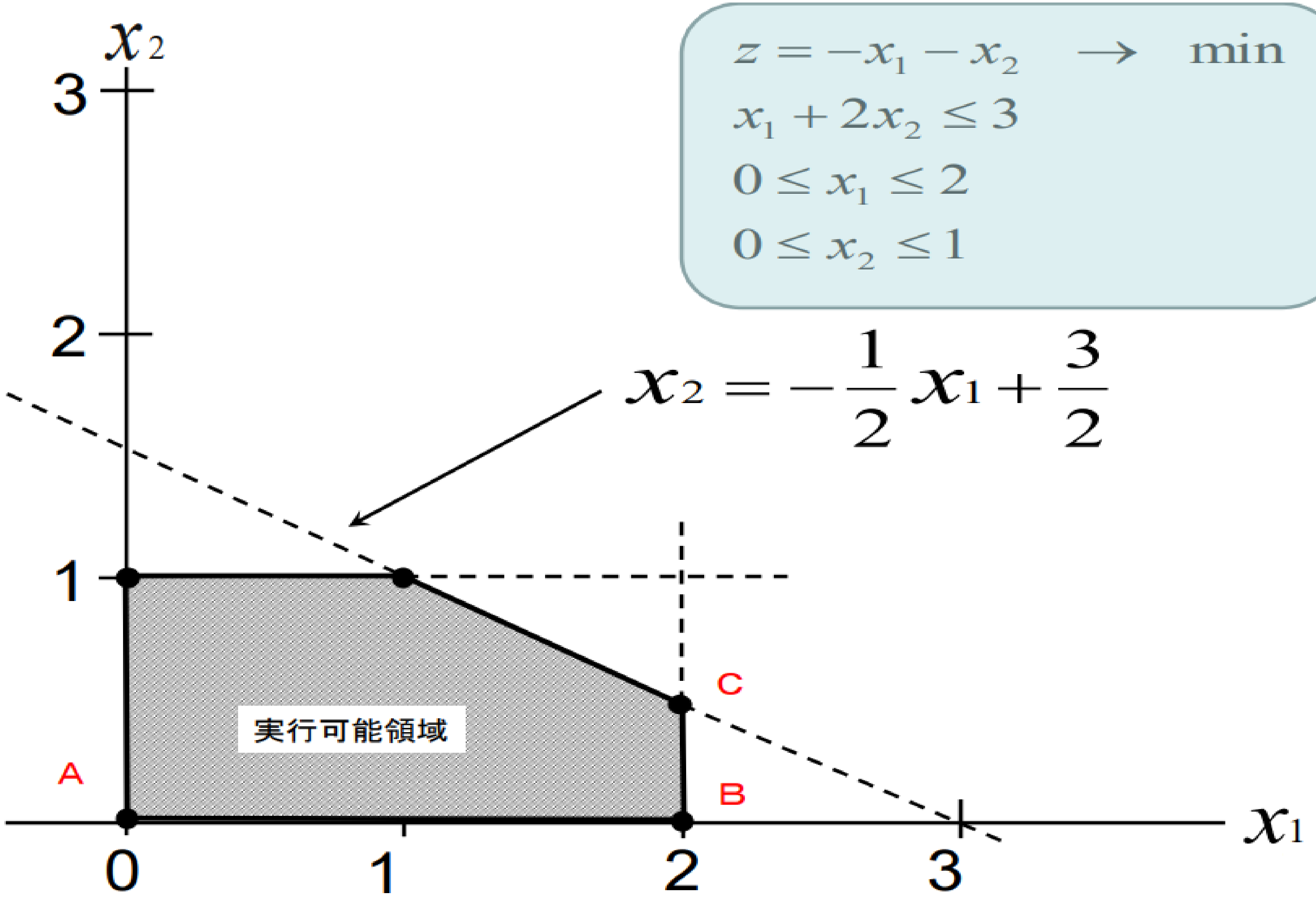
最小問題の実行可能解



$$z = -x_1 - x_2 \quad \rightarrow \quad \min$$
$$x_1 + 2x_2 \le 3$$
$$0 \le x_1 \le 2$$
$$0 \le x_2 \le 1$$

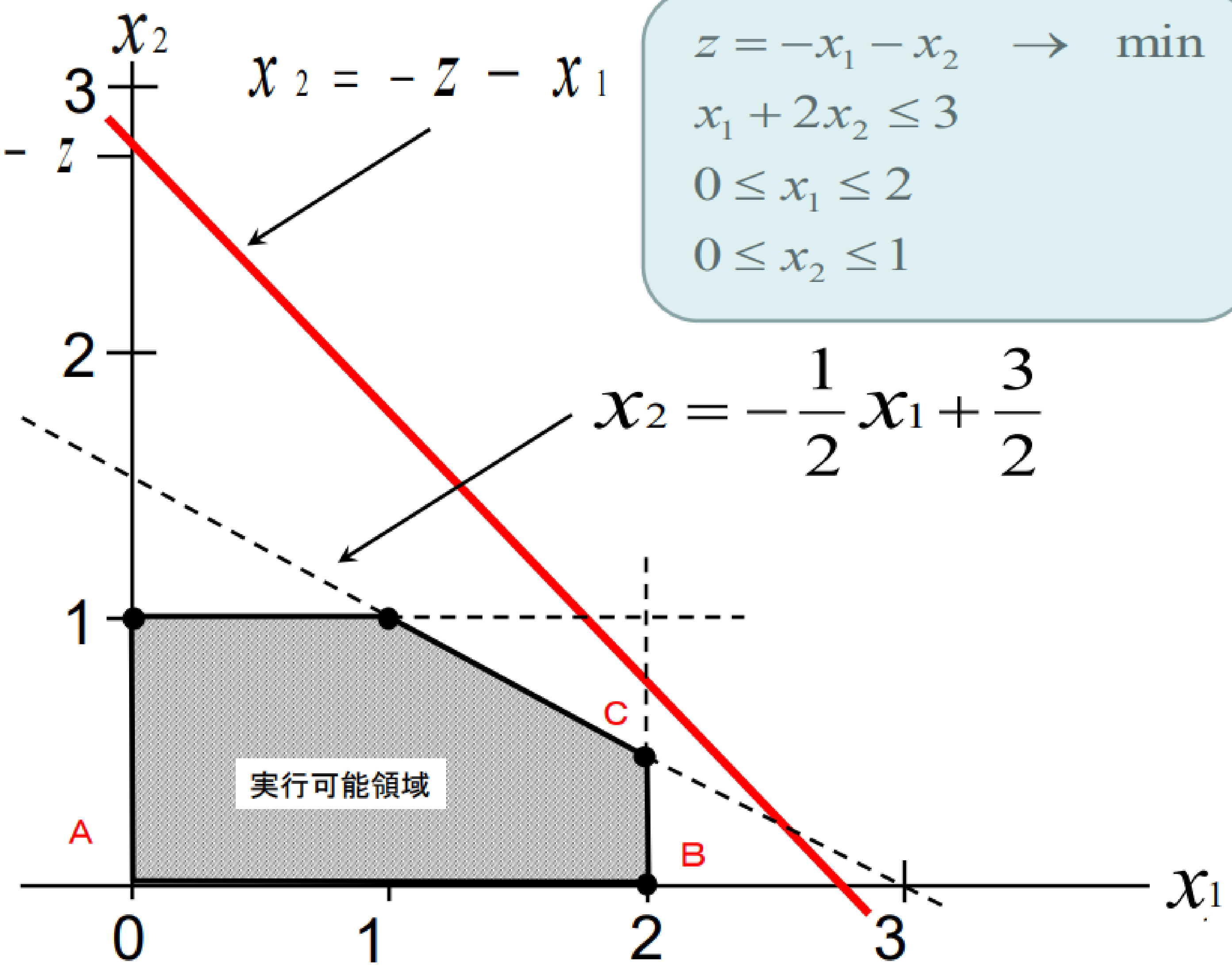
最小問題の実行可能解

$$z = -x_1 - x_2 \quad \rightarrow \quad \min$$
$$x_1 + 2x_2 \le 3$$
$$0 \le x_1 \le 2$$
$$0 \le x_2 \le 1$$



最小問題の実行可能解

$$
\begin{aligned}
&z = -x_1 - x_2 \quad \rightarrow \quad \min \\
&x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
&0 \leq x_1 \leq 2 \\
&0 \leq x_2 \leq 1
\end{aligned}
$$



基底形式

- 基底変数：全変数(5)から式の数(3)だけ選んだ変数
- 非基底変数：残りの変数（5-3=2)

基底変数：制約条件の連立方程式を解く際に選ばれる主要な変数

非基底変数：固定された変数

基底：基底変数の集合
非基底：非基底変数の集合

標準形：

$$x_1 + 2x_2 + y_1 \quad = 3$$
$$x_1 + y_2 \quad = 2$$
$$x_2 \quad + y_3 = 1$$

$$z = -x_1 - x_2$$

$$x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$$

A: x_1, x_2　が非基底変数のとき（基底変数を非基底変数で表現）

$$y_1 = \boxed{3 - x_1 + 2x_2}$$
$$y_2 = \boxed{2 - x_1}$$
$$y_3 = \boxed{1 - x_2}$$

$$z = \boxed{-x_1 - x_2}$$

基底形式

非基底変数(x_1, x_2)=0とする

A:

$$\boldsymbol{y_1 = 3 - x_1 + 2x_2}$$
$$\boldsymbol{y_2 = 2 - x_1}$$
$$\boldsymbol{y_3 = 1 - x_2}$$

$\boldsymbol{z = -x_1 - x_2}$ ➡**min**

zは非基底変数 $\boldsymbol{x_1, x_2}$に関して解かれた形➡基底変数

zは常に基底変数

基底解

$$\boldsymbol{y_1 = 3}$$
$$\boldsymbol{y_2 = 2}$$
$$\boldsymbol{y_3 = 1}$$

$$\boxed{\begin{matrix}\boldsymbol{x_1 = 0} \\ \boldsymbol{x_2 = 0}\end{matrix}}$$

$$\underline{\boldsymbol{z = 0}}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

基底形式　（異なる非基底変数）

標準形（制約条件）

$$x_1 + 2x_2 + y_1 = 3$$
$$x_1 + y_2 = 2$$
$$x_2 + y_3 = 1$$

$$z = -x_1 - x_2$$

$$x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$$

B: x_2, y_2　が非基底変数のとき（基底変数を非基底変数で表現）

$$y_1 = 3 - x_1 - 2x_2 = 1 - 2x_2 + y_2$$
$$x_1 = 2 - y_2$$
$$y_3 = 1 - x_2$$

$$z = -(2 - y_2) - x_2 = -2 - x_2 + y_2$$

非基底変数($x_2,\ y_2$)=0とする

基底解

$$y_1 = 1$$
$$x_1 = 2$$
$$y_3 = 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ y_2 &= 0 \end{aligned}}$$

$$\underline{z = -2}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

基底形式　（異なる非基底変数）

標準形（制約条件）

$$z = -x_1 - x_2$$

$$x_1 + 2x_2 + y_1 = 3$$
$$x_1 + y_2 = 2$$
$$x_2 + y_3 = 1$$

$$x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$$

C: y_1, y_2 が非基底変数のとき（基底変数を非基底変数で表現）

$$x_1 = 2 - y_2$$
$$x_2 = \frac{1}{2}(3 - x_1 - y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1 + y_2)$$
$$y_3 = 1 - x_2 = \frac{1}{2}(1 + y_1 - y_2)$$

$$z = -(2 - y_2) - \frac{1}{2}(1 - y_1 + y_2) = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$$

非基底変数($y_1,\ y_2$)=0とする

基底解

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = \frac{1}{2}$$
$$y_3 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_2 &= 0 \end{aligned}}$$

$$z = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

基底形式・基底解

- 基底形式：各基底変数が非基底変数で表現された標準形
- 三つの基底形式の問題はその外観が異なるだけで、すべて対象問題と等価である
- 基底解：非基底変数を０に固定した解
- 可能基底解：実行可能解
- 最適基底解：可能基底解が最適である➡最適基底

- 対象問題の基底解をすべて列挙する：
  - ８つの基底解のうち、５つが可能基底解（非負条件満たす）

非負条件を満たす

基底解

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & ○ & & ○ & & ○ & ○ & ○ & \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} & = &
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 0 \\ 2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

基底解・最適基底解

- ５つの可能基底解の目的関数の値zは以下のようである

$$
\begin{array}{ccccccc}
z=-x_1-x_2 \text{ の計算} & & 0 & -1 & -2 & -2.5 & -2 \\
\text{可能基底解（実行可能解）} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

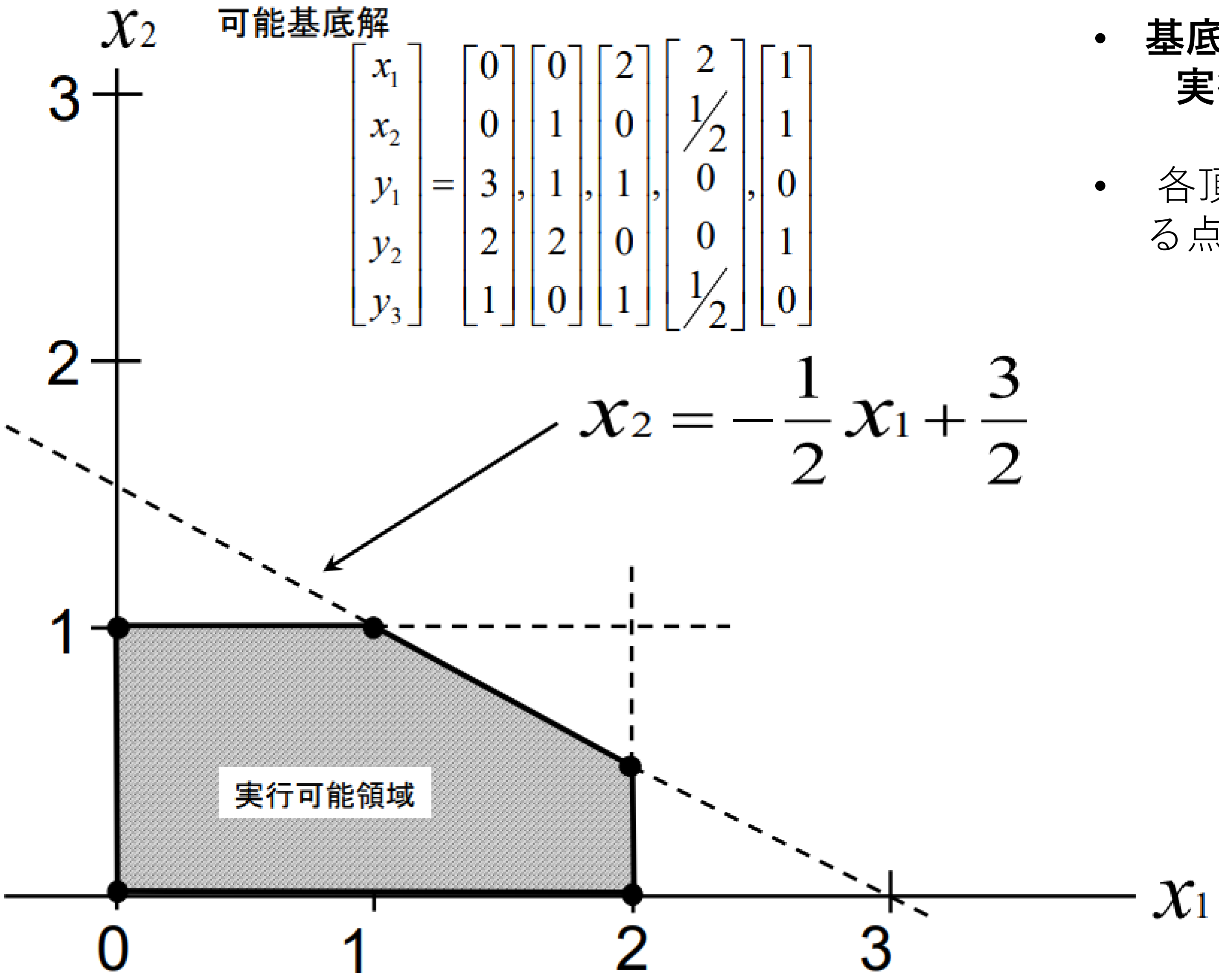
最適解は

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}
$$

のとき $z=-2.5$

- 線形計画問題の最適解をみつけるには
  - 可能基底解をすべて列挙する
  - その中から目的関数を最小値にするものを見つけ出す

基底解（幾何学の解釈）



可能基底解

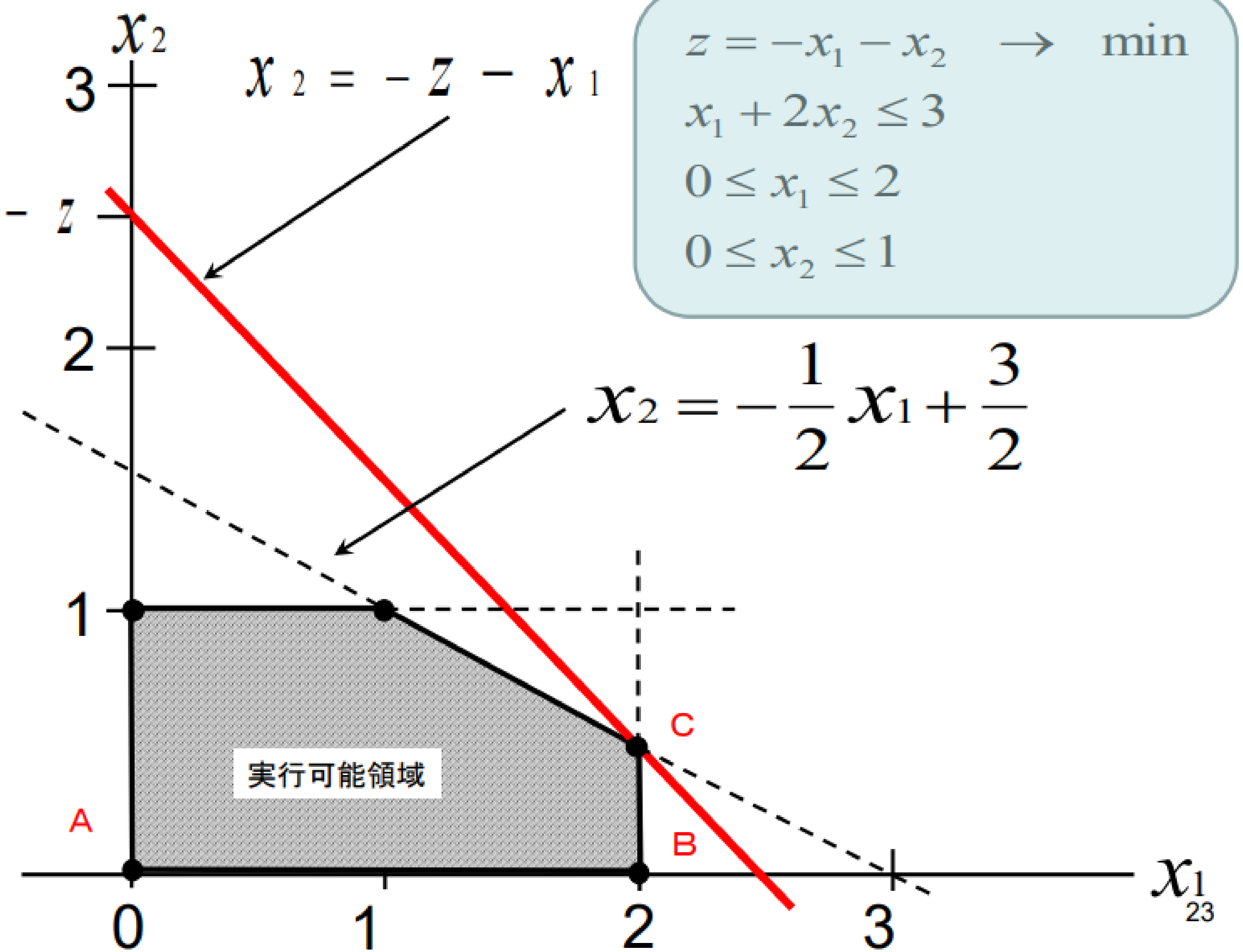
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}$$

- **基底解**（幾何学的には）
  実行可能領域の頂点
- 各頂点は、制約式がちょうど等号で交わる点

最適基底解（幾何学の解釈）

$$
\begin{aligned}
&z = -x_1 - x_2 \quad \rightarrow \quad \min \\
&x_1 + 2x_2 \le 3 \\
&0 \le x_1 \le 2 \\
&0 \le x_2 \le 1
\end{aligned}
$$



基底解 ＝ 頂点
最適基底解 ＝ 最適な頂点

【演習問題】

- 下記の線形計画問題の実行可能領域を図示し、 最適解を求めなさい。

目的関数　$3x_1 + 6x_2$ ➡最小化

制約条件　$x_1 + x_2 \geq 2$

$x_1 + 4x_2 \geq 5$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$