数理計画論

第１回目

- オリエンテーション
- 関数の最適化

謝孟春

xie.mengchun@yamato-u.ac.jp

授業の目的

- 線形計画法および非線形計画法を中心とした最適化理論の基礎と応用を体系的に理解し、数理的手法を用いて意思決定問題を解決する能力の養成を目的とする

- 具体的には、
  - 単体法における基底解とピボット変換の理解を通して線形計画問題の解法を修得し、有界・非有界の概念を具体的に把握する
  - ラグランジュ緩和による双対問題の導出や、ラグランジュ法およびクーン・タッカー条件に基づく非線形最適化手法を学ぶ
  - 組合せ最適化問題についても理解を深め、講義と演習を通じて理論と実践の両面から最適化問題に取り組む力を育成する

授業の内容

- 線形計画計画法については、単体法において基底解法を説明し，ピボット変換によるシンプレックス法を詳述する
- 有界と非有界を具体的な解法の中で説明する
- ラグランジュ緩和による双対問題の導出を講じる
- 非線形計画法では、ラグランジュ法による解法とクーン・タッカーの定理による最適化の方法について論じる
- 組合せ最適化問題も説明する

到達目標

- 計画問題として、線形計画法とネットワーク計画法、および非線形計画を学ぶ
- 自ら計画問題を定式化し、最適化手法によって最適解を導出する
- 線形計画法では、問題の定式化を行い、シンプレックス法によって最適解を求める
- 双対性とラグランジュ緩和の意味を学ぶ
- 非線形計画問題では、ラグランジュ法とクーン・タッカーの定理を理解し、具体的に最適化問題を解法できる能力を身につける

到達目標

評価基準（ルーブリック）

	項目内容	評価4（秀相当）	評価3（優相当）	評価2（良相当）	評価1（可相当）
評価基準1	問題の定式化	現実の問題を適切に抽象化し，目的関数・制約条件を正確に定式化できる	基本的な問題について，概ね正しく定式化できる	教員の指示があれば定式化できる	定式化を部分的にできる
評価基準2	線形計画法の解法	シンプレックス法を正確に適用し，過程と結果を論理的に説明できる	手順に従い最適解を求めることができる	手順に従いある程度最適解を求め、概ね解法を理解している	一部誤りはあるが概ね解法を理解している
評価基準3	非線形計画法の解法	ラグランジュ法・KKT条件を適切に用い，問題を解ける	手順に従い解法を適用できる	教員の指示があれば手順に従い解法を適用できる	部分的に理解している

授業計画表

第1回	オリエンテーション・関数の最適化
第2回	計画問題の種類と概要
第3回	線形計画法の考え方
第4回	シンプレックス法
第5回	有界と非有界
第6回	２段階単体法
第7回	双対問題
第8回	相補性定理
第9回	中間試験
第10回	非線形最適化の基礎
第11回	最急降下法
第12回	緩和問題
第13回	Karush-Kuhn-Tucker 条件
第14回	組合せ最適化
第15回	まとめ・復習・総合演習問題

評価方法

- 演習課題
- 中間試験
- 期末総合課題

により成績を評価する

参考書

数理計画法-最適化の手法

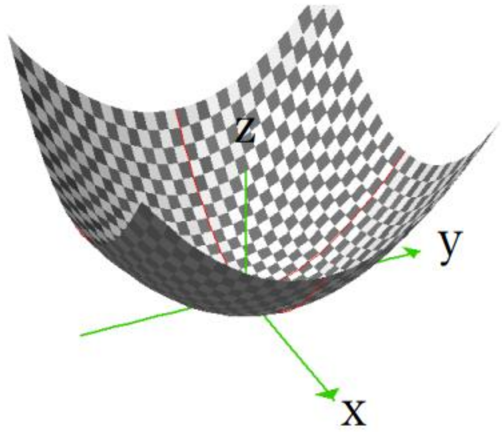
一森哲男　著

共立出版株式会社

関数の最適化

- ２変数関数とは
  - 関数：$f(x, y)$
  - 平面上の点 (x, y)に対して値をとる
  - ３次元空間の曲面として表される

  【例】$f(x, y) = x^2 + y^2$



- 極値とは何か
  - 関数において局所的な最大値（極大値）と最小値（極小値）の総称
  - 山の頂上 → 極大値
  - 谷の底 → 極小値
  - 鞍点（サドルポイント）→ 極値ではない

関数の最適化

- **極大値の定義**
  - **点　(a, b) において、ある範囲で**

$$f(x, y) \leq f(a, b)$$

が成り立つとき

➡ (a, b)を極大点という

- **極小値の定義**
  - **点　(a, b) において、ある範囲で**

$$f(x, y) \geq f(a, b)$$

が成り立つとき

➡ (a, b)を極小点という

関数の最適化

- **極値を持つための必要条件（1階偏微分）**
  - **関数が微分可能なとき：**
  - $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

  ➡停留点（臨界点）と呼ぶ

- **関数$z = f(x, y)$ が点 (a, b) において極値をもつならば、**

  $$f_x(a, b) = 0 \text{ かつ } f_y(a, b) = 0$$

  が成り立つ

- **$f_x(a, b) = 0$ かつ$f_y(a, b) = 0$ を満たす点 (a, b) を$f(x, y)$の停留点という**

関数の最適化

【例1】関数$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ の停留点をすべて求めよ。

【解答】

$$f_x(x,y)=3x^2-3y$$
$$f_y(x,y)=3y^2-3x$$

連立方程式$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$

$$3x^2-3y=0$$
$$3y^2-3x=0$$

より

$$(x,y)=(0,0)$$
$$(x,y)=(1,1)$$

よって、 $f(x,y)$ の停留点は$(0,0)$と$(1,1)$である

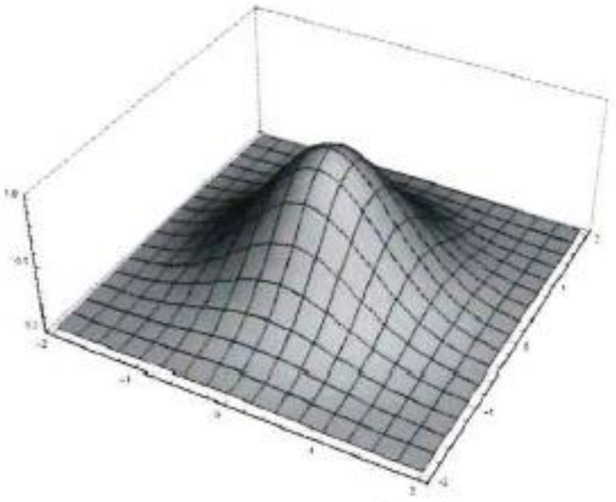
関数の最適化

- 停留点 ＝ 極値とは限らない

【例】 $f(x,y) = x^2 - y^2$ は点(0,0)を停留点にもつ
しかし、 $f(x,y)$は(0,0)で極値をもたない ➡ 鞍点

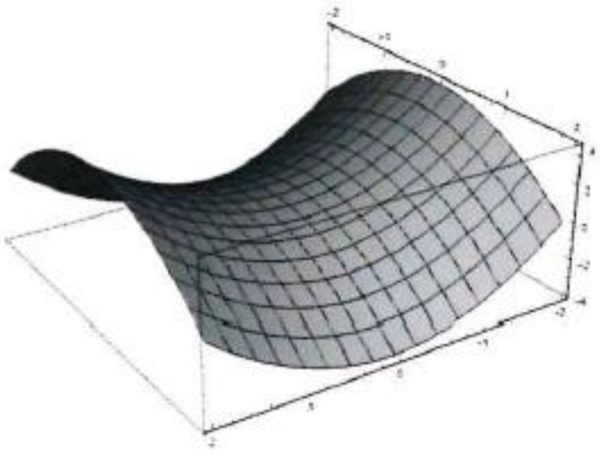
【停留点の例】

極大



(a) $z = e^{-x^2-y^2}$

鞍点



(b) $z = x^2 - y^2$

関数の最適化

- 極値判定（2階偏微分による判定）
- 留点で極値を持つかどうかを判定為の条件：

ヘッセ行列（Hessian）

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow H(a,b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$$

- 判定式：

$$detH(a,b) = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - \left(f_{xy}(a,b)\right)^2$$

関数の最適化

- 極値判定条件（判定ルール）

$(1)\ \det \mathrm{H}(\mathrm{a},\mathrm{b}) > 0$　かつ　$f_{xx}(a,b) > 0$　➡　$f(x,y)$は点(a,b)で極小値

$(2)\ \det \mathrm{H}(\mathrm{a},\mathrm{b}) > 0$　かつ　$f_{xx}(a,b) < 0$　➡　$f(x,y)$は点(a,b)で極大値

$(3)\ \det \mathrm{H}(\mathrm{a},\mathrm{b}) < 0$　かつ　$f(x,y)$は点(a,b)で極値を持たない　➡　点(a,b)を鞍点という

- $det\ H(a,b) = 0$　➡ 判定不可

- 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　に対する行列式det Aは det A=ad-bcで与えられる

関数の最適化

【例2】関数$\boldsymbol{f(x,y)=x^3+y^3-3xy}$ の停留点について、各停留点におけるヘッセ行列を求め、極値をとるかどうか判定せよ。

【解答】

$\boldsymbol{f_{xx}(x,y)=6x,\ \ f_{xy}(x,y)=-3,\quad f_{yy}(x,y)=6y}$

$H(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$

【例１】より停留点は(0,0)と(1,1)

各停留点でのヘッセ行列:

$H(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$=-9<0　➡　(0,0)は鞍点

$H(1,1)=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$=27>0 かつ$\boldsymbol{f_{xx}(1,1)=6>0}$ ➡　(1,1)極小値

関数の最適化

【演習問題】

配布した問題を解いたうえで、画像データまたはPDF形式にてLMSへ提出してください。